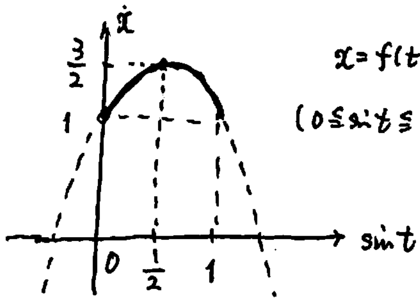
(1) $f(t) = 2\sin t + \cos 2t$

$= 2\sin t + 1 - 2\sin^2 t$

$= -2\left(\sin t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$.

ここで　$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ より　$0 \leqq \sin t \leqq 1$ だから



$x = f(t)$
$(0 \leqq \sin t \leqq 1)$

$\boxed{f(t) \text{の 最大値は } \frac{3}{2} \quad \sin t = \frac{1}{2} \text{のとき、つまり } t = \frac{\pi}{6} \text{のとき}}$ となる.

また　$g(t) = 2\cos t + \sin 2t$ より

$g'(t) = -2\sin t + 2\cos 2t$

$= -2\sin t + 2(1 - 2\sin^2 t)$

$= -2(2\sin^2 t + \sin t - 1)$

$= -2(2\sin t - 1)(\sin t + 1)$

よって　$g(t)$ の $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ での増減表は下のようになる

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	2	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

$g(0) = 2 \times 1 + 0 = 2$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 0 + 0 = 0$

よって $\boxed{g(t) \text{の 最大値は } \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(t = \frac{\pi}{6} \text{のとき}\right)}$

（$f(t)$ の最大値 別解

$f(t) = 2\sin t + \cos 2t$ より　$f'(t) = 2\cos t - 2\sin 2t$

$= 2\cos t - 4\sin t \cos t$

$= 2\cos t\,(1 - 2\sin t)$.

よって $f(t)$ の $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ での増減表は以下のようになる

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

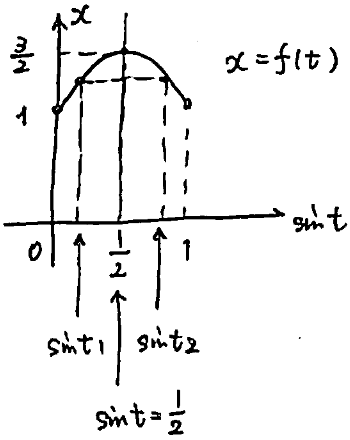
$f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 1 + (-1) = 1$.

よって $\boxed{f(t) \text{の 最大値は } \frac{3}{2} \left(t = \frac{\pi}{6} \text{のとき}\right)}$ ）

(2) $f(t) = -2\left(\sin t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$ $(0 \leqq \sin t \leqq 1)$ より下図のようになり



$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \frac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1) = f(t_2)$ をみたすとき

$\sin t_1$ と $\sin t_2$ は $\sin t = \frac{1}{2}$ に関して対称になる

($f(t)$ は $\sin t$ の2次関数であるため)

よって $\alpha > 0$ として $\begin{cases} \sin t_2 = \frac{1}{2} + \alpha \\ \sin t_1 = \frac{1}{2} - \alpha \end{cases}$ とおくことができる ①

このとき $g(t_1)^2 - g(t_2)^2 = (2\cos t_1 + \sin 2t_1)^2 - (2\cos t_2 + \sin 2t_2)^2$

$$= (2\cos t_1 + 2\sin t_1 \cos t_1)^2 - (2\cos t_2 + 2\sin t_2 \cos t_2)^2$$

$$= 4\cos^2 t_1 (1 + \sin t_1)^2 - 4\cos^2 t_2 (1 + \sin t_2)^2$$

$$= 4(1 - \sin^2 t_1)(1 + \sin t_1)^2 - 4(1 - \sin^2 t_2)(1 + \sin t_2)^2$$

$$= 4(1 - \sin t_1)(1 + \sin t_1)^3 - 4(1 - \sin t_2)(1 + \sin t_2)^3$$

$$= 4\left\{1 - \left(\tfrac{1}{2} - \alpha\right)\right\}\left\{1 + \left(\tfrac{1}{2} - \alpha\right)\right\}^3 - 4\left\{1 - \left(\tfrac{1}{2} + \alpha\right)\right\}\left\{1 + \left(\tfrac{1}{2} + \alpha\right)\right\}^3$$

(①より)

$$= 4\left(\tfrac{1}{2} + \alpha\right)\left(\tfrac{3}{2} - \alpha\right)^3 - 4\left(\tfrac{1}{2} - \alpha\right)\left(\tfrac{3}{2} + \alpha\right)^3$$

$$= \frac{4}{16}(1 + 2\alpha)(3 - 2\alpha)^3 - \frac{4}{16}(1 - 2\alpha)(3 + 2\alpha)^3$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2\alpha)(27 - 54\alpha + 36\alpha^2 - 8\alpha^3)$$

$$- \frac{1}{4}(1 - 2\alpha)(27 + 54\alpha + 36\alpha^2 + 8\alpha^3)$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}_{2}} \times 1 \times \cancel{2}(-54\alpha - 8\alpha^3) + \frac{1}{\cancel{4}} \times \cancel{2}\alpha \times \cancel{2}(27 + 36\alpha^2)$$

$$= -27\alpha - 4\alpha^3 + 27\alpha + 36\alpha^3 = 32\alpha^3 > 0.$$

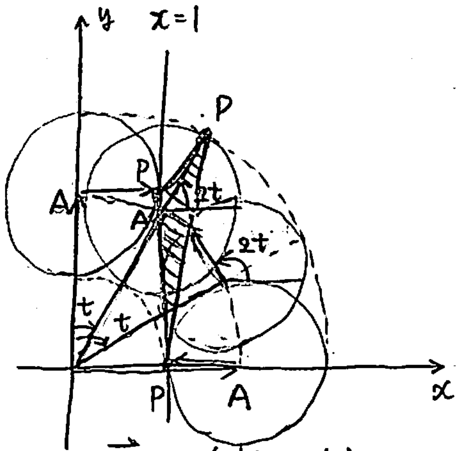
(①より $\alpha > 0$ だから)

よって $g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$ がなりたつ.

(3) (2)より $g(t_1)^2 > g(t_2)^2$ がなりたち．(1)より $g(t_1) \geqq 0$，$g(t_2) \geqq 0$ だから

$g(t_1) > g(t_2)$ がなりたつ（但し，$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \frac{\pi}{2}$）

└②



$\overrightarrow{OA} = 2(\sin t, \cos t)$

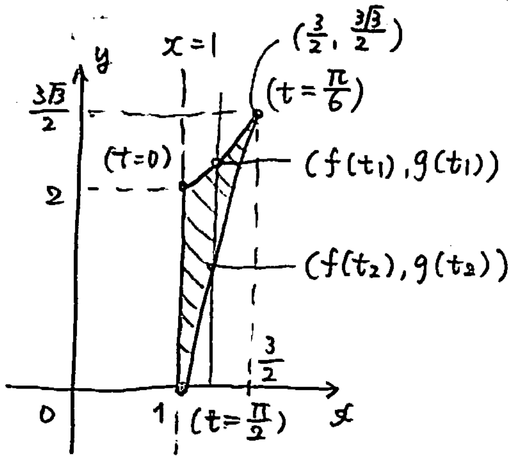
$\overrightarrow{AP} = (\cos 2t, \sin 2t)$

中心原点 半径3の円に内接するように半径1の円を中心(0, 2)のところから時計回りにころがすときの，半径1の円上の点(1, 2)がうごく軌跡が C となる

$\overrightarrow{OA} = 2(\sin t, \cos t)$，

$\overrightarrow{AP} = (\cos 2t, \sin 2t)$ のとき

$$\overrightarrow{OP} = 2(\sin t, \cos t) + (\cos 2t, \sin 2t) = (f(t), g(t)) \quad となる$$



また ② より 求める面積Sは 左図の斜線部となる

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{6}$ の y を y_1，

$\frac{\pi}{6} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の y を y_2 とおくと

求める面積Sは

$$S = \int_1^{\frac{3}{2}} y_1\,dx - \int_1^{\frac{3}{2}} y_2\,dx \quad であり．$$

$$y = g(t) = 2\cos t + \sin 2t$$

$$dx = (2\cos t - 2\sin 2t)\,dt$$

x	$1 \cdots\cdots \frac{3}{2} \cdots\cdots 1$
t	$0 \cdots\cdots \frac{\pi}{6} \cdots\cdots \frac{\pi}{2}$

であるから

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t)\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2 t - 2\sin^2 2t - 2\cos t \sin 2t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{2(1+\cos 2t) - (1-\cos 4t) - 4\sin t\cos^2 t\}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2t + \cos 4t - 4\sin t\cos^2 t)\,dt = \left[t + \sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{4}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}} \quad となる$$