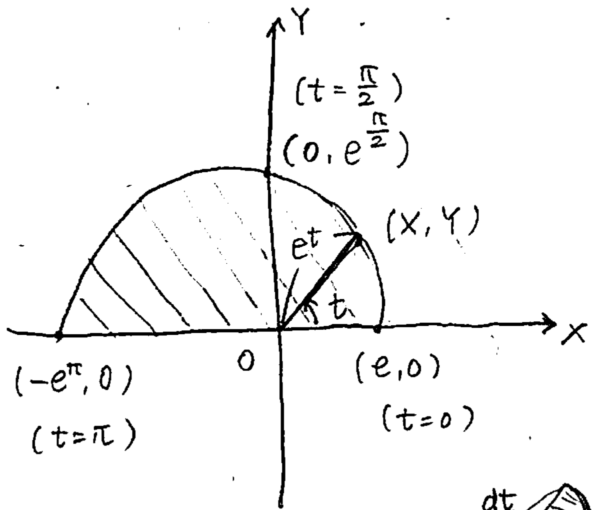
$$\begin{cases} x = e^t\cos t + e^\pi \\ y = e^t \sin t \end{cases} \quad より \quad \begin{cases} x - e^\pi = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$$

ここで $X = x - e^\pi$, $Y = y$ とおくと $(X, Y)$ は $(x, y)$ を

$x$軸方向に $e^\pi$だけ平行移動した点となり

$(X, Y) = (e^t\cos t, e^t\sin t)$ と $x$軸で囲まれた面積は

求める面積と等しくなる




よって求める面積を$S$とすると

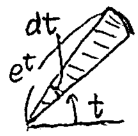
$(X, Y)$ は $x$軸正方向とのなす角 $t$

原点までの距離 $e^t$ であることを考えると

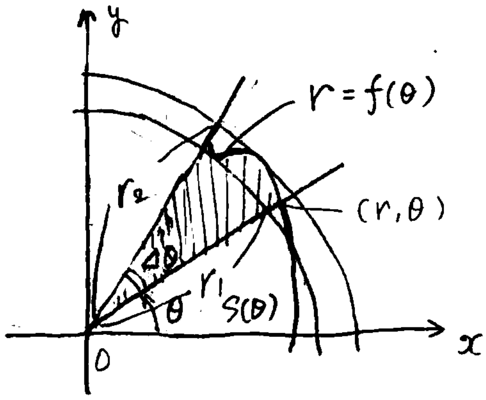
$$S = \int_0^\pi \frac{1}{2}(e^t)^2 dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^\pi = \boxed{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)}$$

となる



$r=f(\theta)$ $\left(\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}\right)$ で表される部分の面積について




左図のように $r=f(\theta)$ と $x$ 軸と $y=(\tan\theta)x$ とで囲まれる部分の面積を $S(\theta)$ とすると

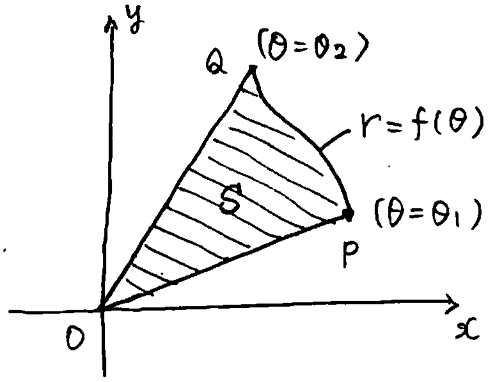
左の斜線部の面積は $S(\theta+\Delta\theta)-S(\theta)$ であり

$\frac{1}{2}r_1^2\Delta\theta \leqq S(\theta+\Delta\theta)-S(\theta) \leqq \frac{1}{2}r_2^2\Delta\theta$ であるから

$\frac{1}{2}r_1^2 \leqq \dfrac{S(\theta+\Delta\theta)-S(\theta)}{\Delta\theta} \leqq \frac{1}{2}r_2^2$ となる

ここで $\Delta\theta \to 0$ のとき $\frac{1}{2}r_1^2 \to \frac{1}{2}r^2$, $\frac{1}{2}r_2^2 \to \frac{1}{2}r^2$ であるから

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{S(\theta+\Delta\theta)-S(\theta)}{\Delta\theta} = \frac{d}{d\theta}S(\theta) = \frac{1}{2}r^2$$ となる




よって $\boxed{S(\theta) = \frac{1}{2}r^2\theta + C \ (C\text{は定数})}$ がなりたつので

$r=f(\theta)$ 上の点 $P(r_1, \theta_1)$, $Q(r_2, \theta_2)$ $(\theta_1 < \theta_2)$

とすると OP, OQ と $r=f(\theta)$ で囲まれる面積 $S$ は

$$\boxed{S = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}r^2\,d\theta \quad \text{がなりたつ}}$$