

$$z + \frac{1}{z} = \sqrt{3} \text{ のとき } \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 \text{ より } z^2 + \frac{1}{z^2} = (\sqrt{3})^2 - 2 = 1$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + 3z + 3\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} \text{ より}$$

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) = (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} = 0$$

$$\text{よって } \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) = z^5 + \frac{1}{z^5} + z + \frac{1}{z} \text{ より}$$

$$1 \times 0 = z^5 + \frac{1}{z^5} + z + \frac{1}{z} \text{ 従って } z^5 + \frac{1}{z^5} = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right)^2 &= z^{10} + \frac{1}{z^{10}} + 2 \text{ より } z^{10} + \frac{1}{z^{10}} = \left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right)^2 - 2 \\ &= (-\sqrt{3})^2 - 2 = \boxed{1} \end{aligned}$$

(別解)  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  とすると  $(r > 0, -\pi \leq \theta < \pi)$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$\text{よって } z + \frac{1}{z} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = \sqrt{3} \text{ より}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta &= \sqrt{3} \quad \text{--- ①} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta &= 0 \quad \text{--- ②} \end{aligned} \right. \text{ が必要} \text{---}$$

②において  $\sin\theta = 0$  とすると  $\cos\theta = \pm 1$  より ①は

$$r + \frac{1}{r} = \pm\sqrt{3} \text{ から}$$

$$r^2 + 1 = \pm\sqrt{3}r$$

$$r^2 \pm \sqrt{3}r + 1 = 0$$

この判別式を  $D$  とすると  $D = (\pm\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 1 = -1 < 0$  より

$r$  は実数と仮定不適

$$\text{よって } r - \frac{1}{r} = 0 \text{ より } r^2 - 1 = 0 \text{ かつ } r > 0 \text{ より } r = 1$$

$$\text{このとき ①は } 2\cos\theta = \sqrt{3} \text{ より } \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ から } \theta = \pm \frac{\pi}{6}$$

以上のことから  $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$  または  $z = \cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})$  となり

$$\text{いずれの場合も } z^{10} + \frac{1}{z^{10}} = \cos\frac{10}{6}\pi + \cos(-\frac{10}{6}\pi) + i\left\{\sin\frac{10}{6}\pi + \sin(-\frac{10}{6}\pi)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + i \times 0 = \boxed{1} \text{ となる}$$