(1) $x=\frac{\pi}{6}$ のとき $\sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\sin 2x=\sin\frac{2\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ だから $\sin x \boxed{<} \sin 2x$

$\boxed{ア}$ は ⓪

$x=\frac{2}{3}\pi$ のとき $\sin x=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 2x=\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ だから $\sin x \boxed{>} \sin 2x$

$\boxed{イ}$ は ②

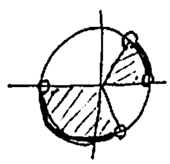
(2) $\sin 2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(\underset{ウ}{\boxed{2}}\cos x-\underset{エ}{\boxed{1}})$ であるから

$\sin 2x-\sin x>0$ がなりたつことは

「$\sin x>0$ かつ $2\cos x-1>0$」 ― ① または

「$\sin x<0$ かつ $2\cos x-1<0$」 ― ② がなりたつことと同値である

①より $0<x<\frac{\pi}{\underset{オ}{\boxed{3}}}$，②より $\pi<x<\frac{\overset{カ}{\boxed{5}}}{\underset{キ}{\boxed{3}}}\pi$



ゆえに $0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき $\sin 2x>\sin x$ がなりたつような

x の値の範囲は $0<x<\frac{\pi}{3}$，$\pi<x<\frac{5}{3}\pi$ である

(3) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$ で

$\alpha+\beta=4x$ ―㋐，$\alpha-\beta=3x$ ―㋑ とおくと $\frac{㋐+㋑}{2}$ より $\alpha=\frac{7}{2}x$

$\frac{㋐-㋑}{2}$ より $\beta=\frac{1}{2}x$

よって $\sin 4x-\sin 3x=2\cos\frac{\boxed{7}}{\boxed{2}}x\sin\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}x$ だから　($\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ でもよい)

$\boxed{ク}$ は ④　$\boxed{ケ}$ は ⑦

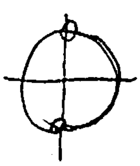
$\sin 4x-\sin 3x>0$ がなりたつことは

「$\cos\frac{7}{2}x>0$ かつ $\sin\frac{1}{2}x>0$」 ― ④ または

「$\cos\frac{7}{2}x<0$ かつ $\sin\frac{1}{2}x<0$」 ― ⑤ がなりたつことと同値である

④より $\cos\frac{7}{2}x>0$ をとくと $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{7}{2}x<\frac{\pi}{2}<2k\pi$

(kは整数) より

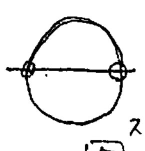


$\frac{2}{7}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)<x<\frac{2}{7}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$\frac{-1+4k}{7}\pi<x<\frac{1+4k}{7}\pi$

$0\leqq x\leqq\pi$ より $\underline{0\leqq x<\frac{1}{7}\pi,\ \frac{3}{7}\pi<x<\frac{5}{7}\pi,\ x=\pi}$ ― ㋒

$\sin\frac{1}{2}x>0$ をとくと $2l\pi<\frac{1}{2}x<\pi+2l\pi$ (lは整数) より



$4l\pi<x<(2+4l)\pi$

$0\leqq x\leqq\pi$ より $\underline{0<x\leqq\pi}$ ― ㋓

㋒㋓より $\underline{0<x<\frac{\pi}{\underset{コ}{\boxed{7}}},\ \frac{\boxed{3}}{\underset{シ}{\boxed{7}}}\pi<x<\frac{\overset{ス}{\boxed{5}}}{\underset{セ}{\boxed{7}}}\pi}$ ― ㋔

(4) (2)より $\sin 2x - \sin x > 0$ を $0 \leqq x \leqq 2\pi$ でとくと $0 < x < \frac{\pi}{3}$, $\pi < x < \frac{5}{3}\pi$ であり.

xを$2x$でおきかえると

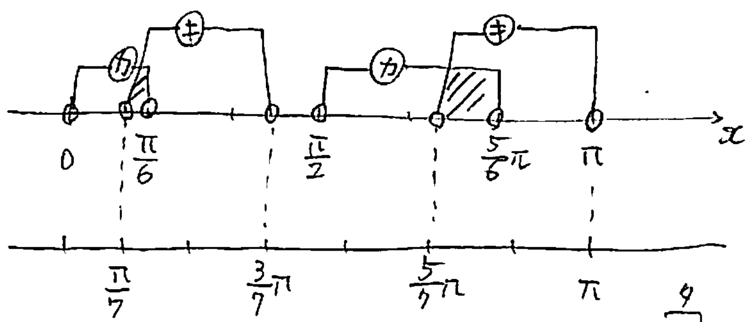
$\sin 4x - \sin 2x > 0$ を $0 \leqq 2x \leqq 2\pi$

つまり $0 \leqq x \leqq \pi$ でとくと $0 < 2x < \frac{\pi}{3}$, $\pi < 2x < \frac{5}{3}\pi$ より

$0 < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$ ―カ

また(3)より $\sin 4x - \sin 3x > 0$ を $0 \leqq x \leqq \pi$ でとくと $0 < x < \frac{\pi}{7}$, $\frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$ より

$\sin 3x > \sin 4x$ を $0 \leqq x \leqq \pi$ でとくと $\frac{\pi}{7} < x < \frac{3}{7}\pi$, $\frac{5}{7}\pi < x < \pi$ ―キ



カキより $\frac{\pi}{7} < x < \frac{\pi}{\boxed{6}}$, $\frac{5}{7}\pi < x < \frac{\boxed{5}}{\boxed{6}}\pi$

解答記号	正解	配点
ア	0	1
イ	2	1
ウエ	21	2
オ	3	2
カキ	53	2
クケ	a7	2
コ	7	2
サシスセ	3757	2
ソ	6	2
タチ	56	2
		18点

(1) $a>0$, $a \neq 1$, $b>0$ のとき $\log_a b = x$ とおくと $\boxed{a^x = b}$

$\boxed{ツ}$ は②

(2)(i) $\log_5 25 = \boxed{2}_{テ}$, $\log_9 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \boxed{\dfrac{3}{2}}\begin{matrix}ト\\ナ\end{matrix}$ より どちらも有理数

(ii) $\log_2 3$ が有理数であると仮定すると $\log_2 3 > 0$ であるので

$\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ (p, q は自然数) とできる

(1)により $2^{\frac{p}{q}} = 3$ だから $\boxed{2^p = 3^q}$ ㋥は⑤ とできる

p, q は自然数だから 2^p は偶数, 3^q は奇数

よって $2^p = 3^q$ をみたす自然数 p, q は存在しない

したがって $\log_2 3$ は無理数となる

(iii) a, b を 2以上の自然数とするとき

$\boxed{\text{$a$ と b のいずれか一方が偶数で、もう一方が奇数ならば}}$ $\boxed{ヌ}$ は⑤

$\log_a b$ は常に無理数となる

解答記号	正解	配点
ツ	2	3
テ	2	2
トナ	32	2
ニ	5	2
ヌ	5	3
		12点

(1) $f(x)=x^2(k-x)$ のとき $y=f(x)$ と x 軸との共有点は $(0,0)$ と $(\boxed{k},0)$

$\boxed{ア}$ は ④

$f(x)=-x^3+kx^2$ より

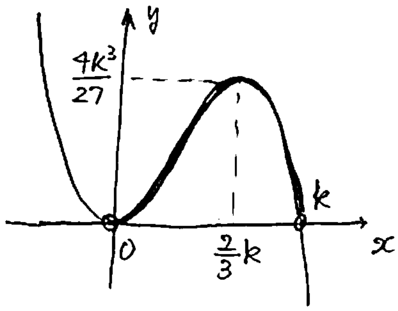
$f'(x)=\underbrace{\boxed{-3}}_{イウ}x^2+\underbrace{\boxed{2}}_{エ}kx$

$=-3x\left(x-\frac{2}{3}k\right)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4k^3}{27}$	$\searrow$
		極小		極大	

$f(0)=0$

$f\left(\frac{2}{3}k\right)=\frac{4k^2}{9}\times\left(k-\frac{2}{3}k\right)=\frac{4}{27}k^3$



よって $x=\boxed{0}$ で

$\boxed{オ}$ は 0

極小値 $\boxed{0}$

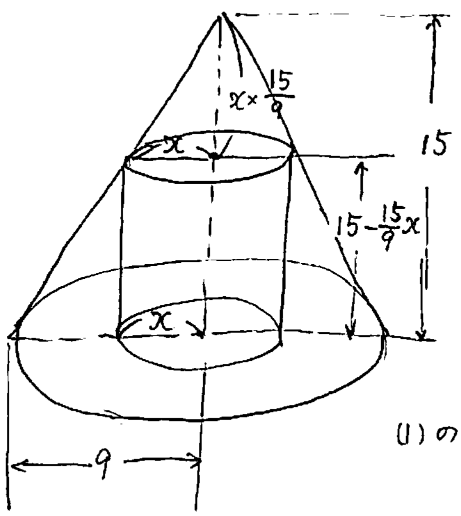
$\boxed{カ}$ は 0

$x=\boxed{\frac{2}{3}k}$ で 極大値 $\boxed{\frac{4k^3}{27}}$

$\boxed{キ}$ は ③　　$\boxed{ク}$ は ⑨

よって $0<x<k$ で $x=\frac{2}{3}k$ で $f(x)$ は最大値 $\frac{4}{27}k^3$ をとる

(2)



円柱の底面の半径を x、体積を V とすると

相似比を使うことにより 円柱の高さは $15-\frac{15}{9}x$ だから

$V=\pi x^2\left(15-\frac{15}{9}x\right)$

$=\frac{15}{9}\pi x^2(9-x)$

$=\frac{\overset{ケ}{\boxed{5}}}{\underset{コ}{\boxed{3}}}\pi x^2(\underset{サ}{\boxed{9}}-x)$　　$(0<x<9)$ であり

(1) の $f(x)$ で $k=9$ とすると

$V=\frac{5}{3}\pi f(x)$　$(0<x<9)$ となるから

$x=\frac{2}{3}\times 9=\overset{シ}{\boxed{6}}$ で V は最大値をとり

その値は $\frac{5}{3}\pi\times\frac{4}{27}\times 9^3=\frac{5\pi\times 4\times 3^6}{3^4}=\underset{スセソ}{\boxed{180}}\pi$

解答記号	正解	配点
ア	4	1
イウエ	−32	3
オ	0	1
カ	0	1
キ	3	1
ク	9	1
ケコサ	539	3
シ	6	2
スセソ	180	2

15点

(1) $\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=\left[\frac{x^2}{10}+3x\right]_0^{30}=\frac{900}{10}+3\times30=90+90=\overset{タチツ}{\boxed{180}}$

また $\displaystyle\int\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=\frac{1}{\underset{テトナ}{\boxed{300}}}x^3-\frac{1}{\underset{ニヌ}{\boxed{12}}}x^2+\underset{ネ}{\boxed{5}}x+C$

(2) (i) $\displaystyle\int_0^{t}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=400$ をとくと

$\displaystyle\left[\frac{x^2}{10}+3x\right]_0^{t}=400$ より

$\displaystyle\frac{t^2}{10}+3t-400=0$

$t^2+30t-4000=0$

$(t+80)(t-50)=0$

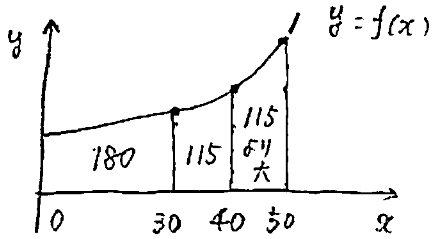
$t>0$ より $t=50$　　よって $\boxed{ノ}$ は ④の50日後 となる

(ii) $\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=180$，$\displaystyle\int_{30}^{40}\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=115$ であり

$x\geqq30$ で $f(x)$ は増加するので

$\displaystyle\int_{30}^{40}f(x)dx\ \boxed{<}\ \int_{40}^{50}f(x)dx$ となる

$\boxed{ハ}$ は ⓪



よって $\displaystyle\int_0^{40}f(x)dx=180+115=295<400$

$\displaystyle\int_0^{50}f(x)dx>180+115+115=410>400$ となるから

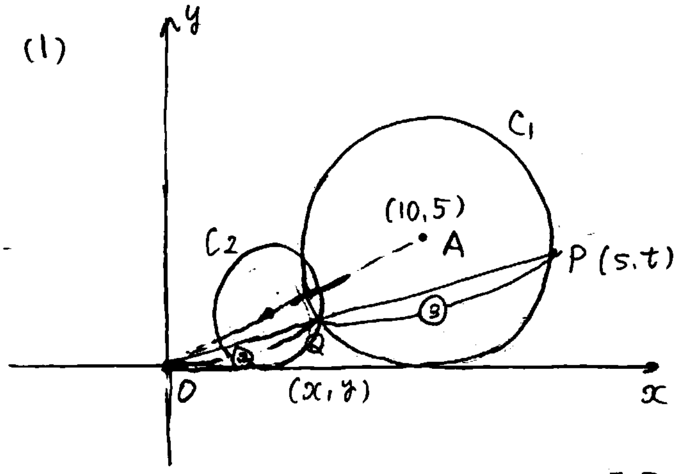
開花日時は2月に入ってから $\boxed{40日後より後かつ50日後より前}$ となる

$\boxed{ヒ}$ は ④

解答記号	正解	配点
タチツ	180	3
テトナニヌネ	300125	3
ノ	4	3
ハ	0	3
ヒ	4	3

15点

(1)



(i) $C_1:(x-10)^2+(y-5)^2=25$ は

中心 $(\boxed{10},\boxed{5})$，半径 $\boxed{5}$ の円である

アイ　ウ　エ

(ii) $P(s,t)$，$Q(x,y)$ とすると

$$\begin{cases} x=\boxed{\dfrac{2}{5}}s \\ y=\boxed{\dfrac{2}{5}}t \end{cases}$$ である

オ カ キ ク

よって $\begin{cases} s=\dfrac{5}{2}x \\ t=\dfrac{5}{2}y \end{cases}$ がなりたつ

$P(s,t)$ は円 C_1 上より

$(s-10)^2+(t-5)^2=25$ がなりたつから

$\left(\dfrac{5}{2}x-10\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}y-5\right)^2=25$ より

$\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\left(x-\dfrac{2}{5}\times10\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\left(y-\dfrac{2}{5}\times5\right)^2=25$

$(x-4)^2+(y-2)^2=25\times\dfrac{4}{25}$

よって点Qは円 $(x-\boxed{4})^2+(y-\boxed{2})^2=\boxed{2}^2$ ― ① 上にある

ケ　コ　サ

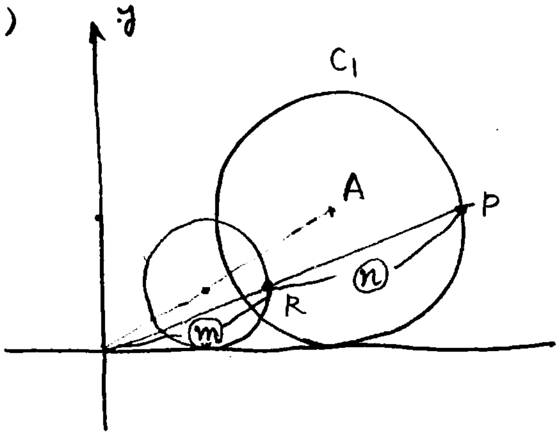
この円を C_2 とすると C_2 上のすべての (x,y) は条件をみたす

ゆえに点Qの軌跡は円 C_2

(iii) C_1 の中心をAとすると，C_2 の中心は OA を $\boxed{2:3}$ に内分した点である

$\boxed{シ}$ は②

(2)



点Rの軌跡は円となり，その中心は

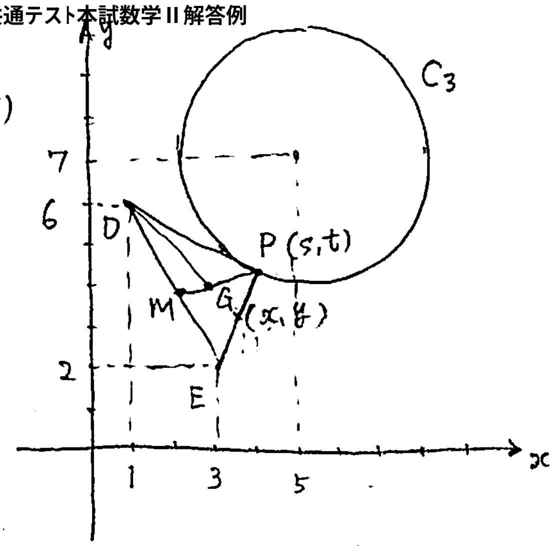
OA を $\boxed{m:n}$ に内分する点であり

$\boxed{ス}$ は②

半径は C_1 の半径の $\boxed{\dfrac{m}{m+n}}$ 倍である

$\boxed{セ}$ は④

(3)



DEの中点をMとすると

△DEPの重心Gは

MPを$\boxed{1:2}$に内分する点である

$\boxed{ソ}$ ⓪

P(s,t), G(x,y)とすると

$(x, y)=\left(\dfrac{1+3+s}{3}, \dfrac{2+6+t}{3}\right)$ より

$\begin{cases} x=\dfrac{s+4}{3} \\ y=\dfrac{t+8}{3} \end{cases}$ よって $\begin{cases} s=3x-4 \\ t=3y-8 \end{cases}$ である

P(s,t)は円C_3上より

$(s-5)^2+(t-7)^2=9$ より

$(3x-4-5)^2+(3y-8-7)^2=9$

$(3x-9)^2+(3y-15)^2=9$

$3^2(x-3)^2+3^2(y-5)^2=9$

よって $(x-3)^2+(y-5)^2=1$ より

点Gの軌跡は 中心$(\underset{タ}{\boxed{3}}, \underset{チ}{\boxed{5}})$, 半径$\underset{ツ}{\boxed{1}}$の円となる

解答記号	正解	配点
アイウ	105	2
エ	5	2
オカ	25	1
キク	25	1
ケコ	42	1
サ	2	1
シ	2	2
ス	2	2
セ	4	2
ソ	0	2
タチ	35	2
ツ	1	2

20点

$S(x) = (x-2)\{x^2-2(p+1)x+2p^2-2p+5\}$

$T(x) = x^3+x+q$

$S(x)=0$ の解は $2, \alpha, \beta$,

$S'(x)=0$ の解は r, α', β'

(1) $S(x)=0$ の解はすべて実数になるのは

$x^2-2(p+1)x+2p^2-2p+5=0$ —① が実数解をもつときだから

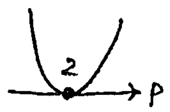
①の判別式を D_1 とすると $\frac{D_1}{4} = \{-(p+1)\}^2 - 1\times(2p^2-2p+5) \geqq 0$ より

$p^2+2p+1-2p^2+2p-5 \geqq 0$

$-p^2+4p-4 \geqq 0$

$p^2-\underset{ア}{\boxed{4}}p+\underset{イ}{\boxed{4}} \leqq 0$

よって $(p-2)^2 \leqq 0$ より



$p=\underset{ウ}{\boxed{2}}$ となる

このとき $S(x)=(x-2)(x^2-6x+8-4+5)$

$=(x-2)(x^2-6x+9)$

$=(x-2)(x-3)^2$ より $S(x)=0$ の解は $x=2, \underset{エ}{\boxed{3}}$ となる

$p \neq 2$ のとき $\frac{D_1}{4}<0$ であることから $S(x)=0$ は2つの虚数解をもち

$x = p+1 \pm \sqrt{(p+1)^2-(2p^2-2p+5)}$

$= p+1 \pm \sqrt{-p^2+4p-4}$

$= p+1 \pm \sqrt{-(p-2)^2}$

$= p+\underset{オ}{\boxed{1}} \pm (p-\underset{カ}{\boxed{2}})i$ となる

(2) $x=r$ が $T(x)=0$ の解より $r^3+r+q=0$ より $q=-r^{\overset{キ}{\boxed{3}}}-r$

よって $T(x)=x^3+x-r^3-r$

$=(x-r)(x^2+rx+r^{\overset{ク}{\boxed{2}}}+\overset{ケ}{\boxed{1}})$

1	0	1	$-r^3-r$	$\lfloor r$
	r	r^2	r^3+r	
1	r	$1+r^2$	0	

$x^2+rx+r^2+1=0$ の判別式を D とおくと

$D=r^2-4(r^2+1)=-3r^2-4<0$ より

すべての実数 r に対して $D\boxed{<}0$

コは⓪

よって α', β' は $\boxed{\text{異なる2つの共役複素数の虚数解}}$ となる

$\boxed{シ}$ は②

その解は
$$x=\frac{-r\pm\sqrt{r^2-4(r^2+1)}}{2}$$
$$=\frac{-r\pm\sqrt{-3r^2-4}}{2}=\frac{-r\pm\sqrt{3r^2+4}\,i}{2}=\boxed{\frac{-r\pm\sqrt{-D}\,i}{2}}$$ となる

$\boxed{サ}$ は⑥

(3)(i) $S(x)=0$, $T(x)=0$ が $x=2$ を共通解にもつとき

(2) より $r=2$ となって $\boxed{\text{ちょうど1個}}$ $\boxed{ス}$ は①

(ii) $x=2$ ではない共通の実数解をもつとき

$$\begin{cases} S(x)=(x-2)\{x^2-2(p+1)x+2p^2-2p+5\} & \text{と} \\ T(x)=(x-r)(x^2+rx+r^2+1) & \text{において} \end{cases}$$

$S(x)$ は $p\neq 2$ では実数解が $x=2$ のみで不適

よって $p=2$ であり、このとき $S(x)=(x-2)(x-3)^2$ だから

共通解は $x=3$、よって $r=3$ となる

ゆえに $(p, r)=(\underset{セ}{\boxed{2}}, \underset{ソ}{\boxed{3}})$

(iii) 共通解が虚数のとき

$x^2-2(p+1)x+2p^2-2p+5=x^2+rx+r^2+1$ より

$$\begin{cases} -2(p+1)=r \\ 2p^2-2p+5=r^2+1 \end{cases}$$ だから

$2p^2-2p+5=4(p+1)^2+1$ より

$2p^2-2p+5=4p^2+8p+5$

$2p^2+10p=0$

$p(p+5)=0$

よって $p=0, -5$

$p=0$ のとき $r=-2(0+1)=-2$

$p=-5$ のとき $r=-2(-5+1)=8$

ゆえに $(p, q)=(\underset{タ}{\boxed{0}}, \underset{チツ}{\boxed{-2}}), (\underset{テト}{\boxed{-5}}, \underset{ナ}{\boxed{8}})$ となる

解答記号	正解	配点
アイ	44	1
ウ	2	2
エ	3	1
オカ	12	2
キ	3	1
クケ	21	2
コサシ	062	3
ス	1	2
セソ	23	2
タチツ	0-2	2
テトナ	-58	2

20点