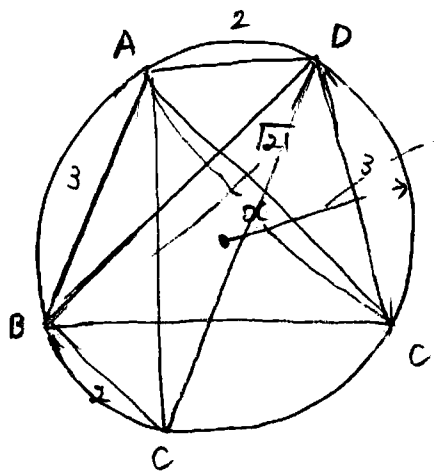




$$(1) \cos \angle DAB = -\frac{2}{3} \text{ より}$$

$$\sin \angle DAB = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

よって $\triangle ABD$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin \angle DAB \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \boxed{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 余弦定理より } BD^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos \angle DAB$$

$$= 9 + 4 - 12 \times \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= 13 + 8 = 21$$

$BD > 0$ より

$$\boxed{BD = \sqrt{21}} \text{ となる}$$

また $\triangle ABD$ の外接円の半径 R は、正弦定理より

$$2R = \frac{BD}{\sin \angle DAB} \text{ から } R = \frac{\sqrt{21}}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{21}}{5} = \boxed{\frac{3\sqrt{105}}{10}}$$

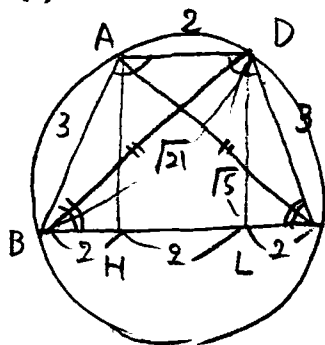
となる

(3) $AC = x$ とおくと C は $\widehat{BD}$ の A を含まない方にあり

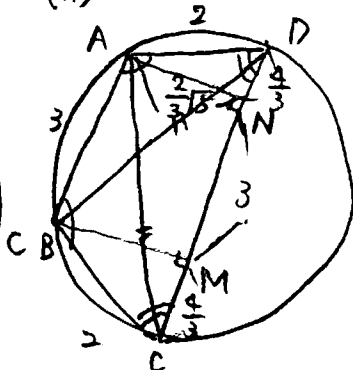
外接円の直径が AC の長さの上限となるので

$$\boxed{2 < x \leq \frac{3\sqrt{105}}{5}} \text{ となる}$$

(i)



(ii)



(4) 同じ円の同じ長さの弧の弦の長さは

等しいので C のとりうる場所は

$\widehat{BAD}$ と同じ長さの弧をもとる左の2か所
となる

(i) のとき $\cos \angle BCD = -\cos \angle DAB = \frac{2}{3}$ であり、 A, D から BC に下した垂線との交点を

$$\text{それぞれ } H, L \text{ とすると } AH = DL = 3 \sin \angle BCD = 3 \sin \angle DAB = 3 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$$

$$\text{また } BH = CL = 3 \cos \angle BCD = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

$$\text{よって 四角形 } ABCD \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times (2+6) \times \sqrt{5} = \boxed{4\sqrt{5}}$$

(ii) のとき 同様に上図の $AN = BM = 2 \sin \angle BCD = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{また } DN = CM = 2 \cos \angle BCD = 2 \times \frac{2}{3}$$

$$\text{よって 四角形 } ABCD \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times (3+3+\frac{4}{3} \times 2) \times \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{26}{3} \times \frac{2\sqrt{5}}{3} = \boxed{\frac{26\sqrt{5}}{9}} \text{ となる}$$