

$$(1) \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos(t - \frac{\pi}{6}) \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi) \text{ における}$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \text{ より } \boxed{\frac{dy}{dx} = 0 \text{ のとき } \cos t = 0 \text{ より } 0 \leq t \leq \pi \text{ だと } t = \frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sin(t - \frac{\pi}{6}) \sin t + \cos(t - \frac{\pi}{6}) \cos t$$

$$= \cos(t - \frac{\pi}{6} + t)$$

$$= \cos(2t - \frac{\pi}{6}) \text{ より } \boxed{\frac{dy}{dt} = 0 \text{ とする } t \text{ は}}$$

$$2t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \text{ は整数}) \text{ より}$$

$$2t = \frac{2+3n}{3} \pi$$

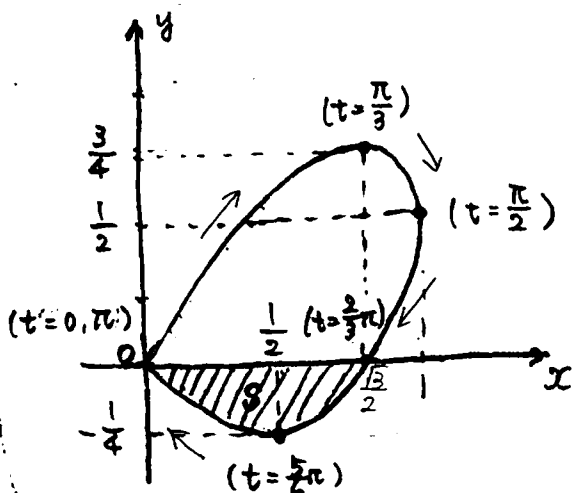
$$\text{より } t = \frac{2+3n}{6} \pi$$

$$\text{但し } 0 \leq t \leq \pi \text{ より } \boxed{t = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi} \text{ となる}$$

(2) $0 \leq t \leq \pi$ での (x, y) の増減表をかくと以下のようになる

t	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
$\frac{dx}{dt}$		+	+	+	0	-	-	-	
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	-	-	0	+	
(x, y) と $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ の向き	(0,0)	↗	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4})$	↘	$(1, \frac{1}{2})$	↙	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$	↖	(0,0)

ゆえに C の概形は以下のようになる



$$(3) y=0 \text{ とすると } \cos(t - \frac{\pi}{6}) = 0 \text{ or } \sin t = 0 \text{ より}$$

$$t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \text{ or } t = 0, \pi$$

$$\text{より } t = \frac{2}{3}\pi, 0, \pi$$

よって求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (-y) dx \text{ であり}$$

$$y = \cos(t - \frac{\pi}{6}) \sin t \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \cdots \frac{\sqrt{3}}{2} \\ t & \pi \cdots \frac{2}{3}\pi \end{array}$$

$$dx = \cos t dt$$

だから

$$S = \int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \{-\cos(t - \frac{\pi}{6}) \sin t\} \cos t dt \text{ より}$$

$$S = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (\cos t \cos \frac{\pi}{6} + \sin t \sin \frac{\pi}{6}) \sin t \cos t dt$$

$$= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 t \sin t + \frac{1}{2} \sin^2 t \cos t \right) dt$$

$$= \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{1}{6} \sin^3 t \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \times (-1)^3 + 0 + \frac{\sqrt{3}}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{6} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{48} - \frac{\sqrt{3}}{48} - \frac{\sqrt{3}}{48} = \frac{4\sqrt{3}}{48} = \frac{\sqrt{3}}{12} \text{ となる}$$