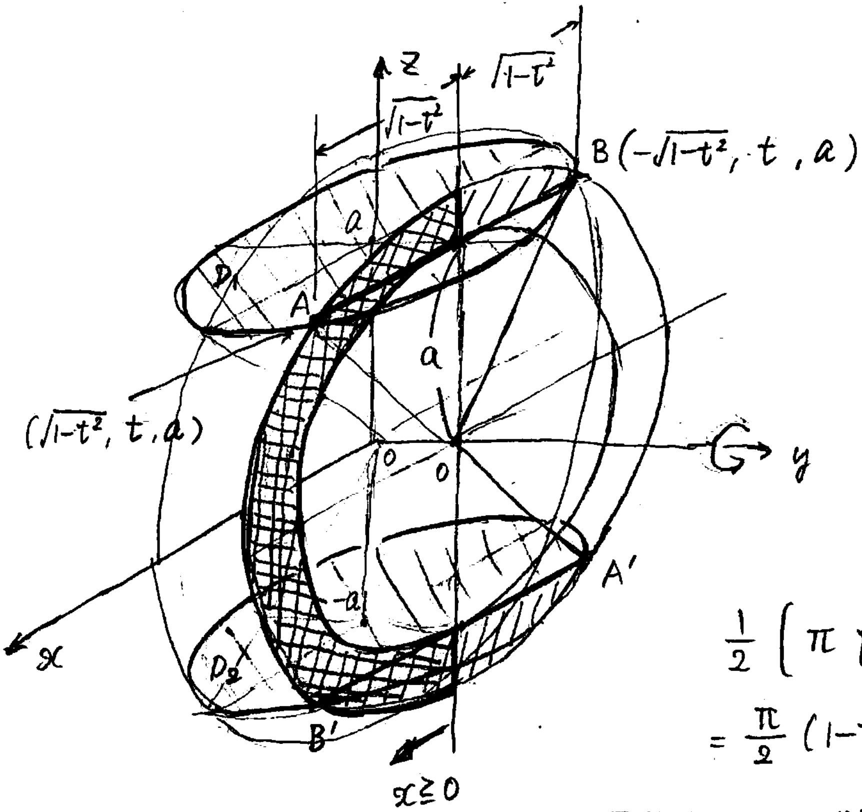


(1) D_1上の点 $A(\sqrt{1-t^2}, t, a)$

$B(-\sqrt{1-t^2}, t, a)$

をとり、線分ABをD_2に重なるまで回転させることを考える

このうち $x \geqq 0$ である部分の面積は半径 $OA = \sqrt{a^2+(1-t^2)}$ の半円から半径 a の円の半円をひいて

$$\frac{1}{2}\left(\pi\{a^2+(1-t^2)\} - \pi a^2\right)$$

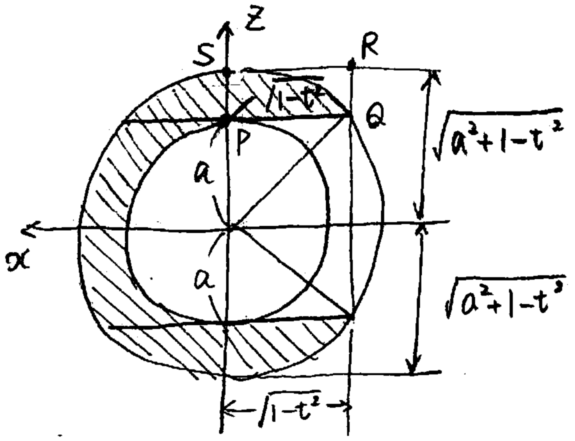
$$= \frac{\pi}{2}(1-t^2)$$

平面 $y=0$ に関して対称であることから

$$W(a) = 2\int_0^1 \frac{\pi}{2}(1-t^2)\,dt$$

$$= \pi\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \pi\left(1-\frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{2}{3}\pi}$$

(2) (1)で $x \geqq 0$ であることを除くと、$y=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ での断面は下図の斜線部となる



左図の四角形PQRSの面積は $\sqrt{1-t^2} \times \left(\sqrt{a^2+1-t^2} - a\right)$ であり

$$\sqrt{1-t^2}\left(\sqrt{a^2+1-t^2} - a\right)$$

$$= \sqrt{1-t^2} \times \frac{a^2+1-t^2-a^2}{\sqrt{a^2+1-t^2}+a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+1-t^2}+a}(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \leqq \frac{1}{a}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}$$ であるから

$$W(a) < V(a) < W(a) + \int_{-1}^{1} \frac{2}{a}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt \quad \text{—①}$$ がなりたつ

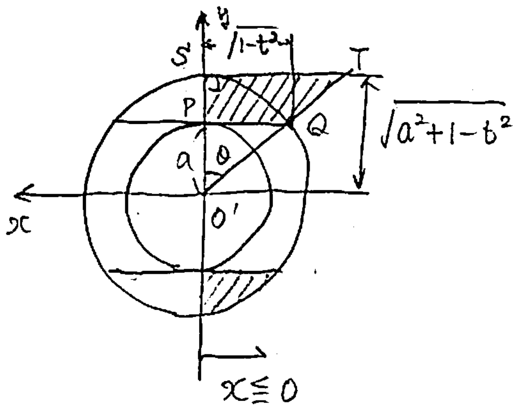
ここで $\int_{-1}^{1} \frac{2}{a}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt = \frac{4}{a}\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$ であり $\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$ は定数だから

$$\lim_{a\to\infty} \frac{4}{a}\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt = 0$$ である

①で $W(a) = \frac{2}{3}\pi$ だから $\frac{2}{3}\pi < V(a) < \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{a}\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$ がなりたつので

はさみうちの原理より $\boxed{\lim_{a\to\infty} V(a) = \frac{2}{3}\pi}$ となる

(2)(別解) $y=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ での断面のうち，$x\leqq 0$ の部分は左図の台形 PQRS の2倍より小さい．



$\angle PO'Q=\theta$ とおくと，台形PQRSの面積は

$\triangle O'ST-\triangle O'PQ$ より

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+1-t^2}\times\sqrt{a^2+1-t^2}\tan\theta-\frac{1}{2}\times a\times a\tan\theta$$
$$=\frac{1}{2}(a^2+1-t^2-a^2)\tan\theta$$
$$=\frac{1}{2}(1-t^2)\tan\theta$$

ここで $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{a}$ より $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{a}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}$ となる

よって $W(a)<V(a)<W(a)+2\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{2a}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$ —② がなりたち

$$2\int_{-1}^{1}\frac{1}{2a}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$$
$$=\frac{2}{a}\int_0^1(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$$ であり $\displaystyle\int_0^1(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$ は定数より

$$\lim_{a\to\infty}\frac{2}{a}\int_0^1(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt=0$$ である

ゆえにはさみうちの原理より $\boxed{\lim_{a\to\infty}V(a)}=W(a)=\boxed{\frac{2}{3}\pi}$ となる

（参考図）