$(1-\sqrt{3}i)z+(1+\sqrt{3}i)\bar{z}=2\sqrt{3}$ — (*) において

$z=x_0$ (x_0が実数) が (*) をみたすとき

$(1-\sqrt{3}i)x_0+(1+\sqrt{3}i)x_0=2\sqrt{3}$ より

$2x_0=2\sqrt{3}$. よって $x_0=\boxed{\sqrt{3}}$ ア

また $z=iy_0$ (y_0は実数) が (*) をみたすとき

$(1-\sqrt{3}i)iy_0+(1+\sqrt{3}i)(-iy_0)=2\sqrt{3}$ より

$2\sqrt{3}y_0=2\sqrt{3}$ より $y_0=\boxed{1}$ イ となる

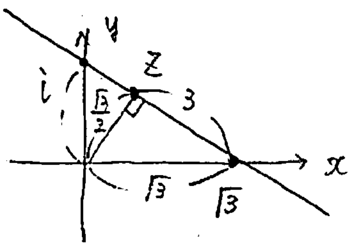
また $z=sx_0+ity_0$ が (*) をみたすとき

$(1-\sqrt{3}i)(sx_0+ity_0)+(1+\sqrt{3}i)(sx_0-ity_0)=2\sqrt{3}$ より

$(2sx_0+2\sqrt{3}ty_0)=2\sqrt{3}$ より

$2\sqrt{3}s+2\sqrt{3}t=2\sqrt{3}$ よって $\boxed{s+t=1}$ ウ となる

よって $z=s\sqrt{3}+it=s\sqrt{3}+i(1-s)$ より zは 点$\sqrt{3}$ と 点i を結ぶ直線上にあるから



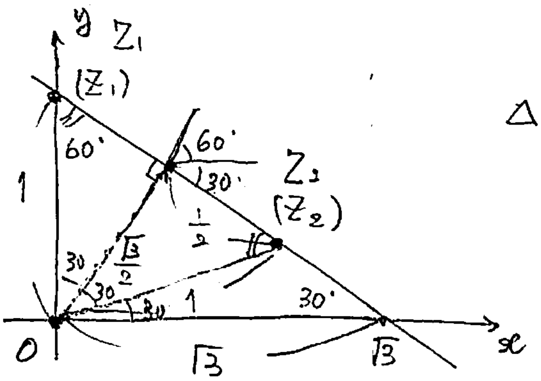
左図より $|z|$ が最小となるのは

$z=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=\boxed{\frac{\sqrt{3}+3i}{4}}$ のときとなる

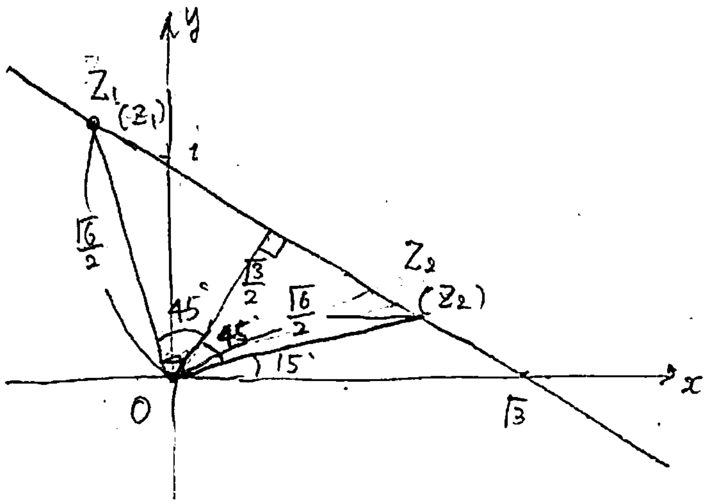
このとき $|z|=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ オ となる



$\triangle Oz_1z_2$ が正三角形のとき、左図のようになり

$z_1=\boxed{i}$ カ, $z_2=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

$=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}$ キ



OZ_1Z_2 が $\angle O=90°$ の直角二等辺三角形のとき

$z_2=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ だから

z_2 の実部は

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\frac{\pi}{12}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{3}+6}{8}=\boxed{\frac{\sqrt{3}+3}{4}}$$

である