Q

数学Ⅱ・数学B　（100点満点）

問題番号(配点)	解答記号	正解	配点
第1問 (30)	ア	2	1
	イ，ウ	2，4	2
	エ，オ	a，5	3
	カ，キ	0，8	2
	ク，ケ	1，6	2
	コ	1	1
	サ，シ	1，5	2
	$\frac{ス}{セ}$，ソ	$\frac{1}{6}$，1	2
	タ	8	2
	チ	b	2
	ツ	6	3
	テ，ト	0，5	3
	ナニヌ	360	2
	ネ	9	3
第2問 (30)	ア，イ	3，6	2
	ウ，エ	0，6	2
	オ，カ	2，2	2
	キ，ク	5，3	2
	ケ，コ	3，2	2
	サシ，ス	−1，2	2
	セ，ソ	0，1	2
	$\frac{タ}{チ}$	$\frac{1}{2}$	2
	$\frac{ツテ}{ト}$	$\frac{21}{4}$	4
	ナ	0	3
	ニ	4	3
	ヌ	3	4
第3問 (20)	ア	1	2
	$\frac{イ}{ウ}$	$\frac{4}{9}$	3
(第3問)	$\frac{エ}{オ}$	$\frac{2}{3}$	3
	カ	3	2
	キ	0	2
	ク	0	3
	ケ	1	5
第4問 (20)	(ア，イ)	(2，4)	1
	(ウ，エ)	(2，8)	1
	オ	2	2
	カ	7	2
	キ	0	2
	ク，$\frac{ケコ}{サ}$，シ	4，$\frac{-1}{2}$，4	2
	$\frac{ス}{セ}$，$\frac{ソタ}{チ}$，$\frac{ツ}{テ}$	$\frac{4}{3}$，$\frac{-1}{2}$，$\frac{8}{3}$	3
	ト	0	2
	ナ	0	2
	ニ	7	3
第5問 (20)	ア，イ	2，0	2
	ウ，エ	7，4	2
	オ	1	3
	カ	2	2
	キ	4	2
	ク	1	2
	ケ	3	2
	コ，サ，シ，ス，セ	5，2，1，2，1	3
	ソ	6	2

（注）第1問，第2問は必答。第3問～第5問のうちから2問選択。計4問を解答。

第１問［１］

(1) $t = \log_3 x$ とおくと $\boxed{x = 3^t}$ ア は②

この両辺 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 x = \log_2 3^t$$
$$= \boxed{t \log_2 3}$$ イ は②

よって $t = \boxed{\dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}}$ ウ は④

すなわち $\log_3 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}$ となる

(2) (i) $\begin{cases} f(x) = \log_2 x + \log_3 x \\ g(x) = (\log_2 x)\cdot(\log_3 x) \end{cases}$ のとき

$$f(x) = \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} = \boxed{\left(1 + \frac{1}{\log_2 3}\right)} \log_2 x$$

エ は④

$$g(x) = (\log_2 x)\cdot\frac{\log_2 x}{\log_2 3} = \boxed{\frac{1}{\log_2 3}} \times (\log_2 x)^2$$

オ は⑤

$X = \log_2 x$ とおくと Xのとり得る値の範囲は実数全体である

よって $f(x) > g(x)$ は $\left(1 + \dfrac{1}{\log_2 3}\right) X > \dfrac{1}{\log_2 3} X^2$ より

$$\frac{1}{\log_2 3} X^2 - \left(1 + \frac{1}{\log_2 3}\right) X < 0$$

$\log_2 3 > 0$ より $X^2 - (\log_2 3 + 1) X < 0$

$$X\{X - (1 + \log_2 3)\} < 0$$

よって $\boxed{0} < X < \boxed{1 + \log_2 3}$ となるので

カ は⓪　キ は⑧

$$\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 2 + \log_2 3$$
$$\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 6$$

底2は1より大きいので

$\boxed{1} < x < \boxed{6}$ となる

ク　ケ

(iii) $F(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{3}} x$

$G(x) = (\log_{\frac{1}{2}} x)(\log_{\frac{1}{3}} x)$

$\log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \boxed{-\log_2 x}$ $\boxed{コ}$ は ①

また $\log_{\frac{1}{3}} x = \dfrac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = -\log_3 x$ であるから

$F(x) = -(\log_2 x + \log_3 x) = \boxed{-f(x)}$ $\boxed{サ}$ は ①

$G(x) = (-\log_2 x)(-\log_3 x) = \boxed{g(x)}$ $\boxed{シ}$ は ⑤ となる

よって $F(x) > G(x)$ のとき

$-f(x) > g(x)$ は $-\left(1 + \dfrac{1}{\log_2 3}\right)X > \dfrac{1}{\log_2 3}X^2$ より

$$\frac{1}{\log_2 3}X^2 + \left(1 + \frac{1}{\log_2 3}\right)X < 0$$

$\log_2 3 > 0$ より $X^2 + (\log_2 3 + 1)X < 0$

$$X\{X + (\log_2 3 + 1)\} < 0$$

よって $-(\log_2 3 + 1) < X < 0$ より

$$-(\log_2 3 + \log_2 2) < \log_2 x < \log_2 1$$

$$-\log_2 6 < \log_2 x < \log_2 1$$

$$\log_2 6^{-1} < \log_2 x < \log_2 1$$

底2は1より大きいから

$\boxed{\dfrac{1}{6}}_{スセ} < x < \boxed{1}_{ソ}$ となる

解答記号	正解	配点
ア	2	1
イウ	24	2
エオ	25	3
カキ	08	2
クケ	16	2
コ	1	1
サシ	15	2
スセソ	161	2

15点

［2］

(1) $\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{\boxed{2\sin x\cos x}}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ タは⑧

であり、分母分子 $\cos^2 x$ でわると

$\tan 2x = \boxed{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$ チはⓑ

さらに $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ のとき $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ だから

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\tan x}{\tan 2x} = \frac{\tan x - \tan^3 x}{2\tan x} = \boxed{\frac{1-\tan^2 x}{2}} \quad \text{―①}$$

ツは⑥

(2) ①から $0<x<\frac{\pi}{4}$ のとき $0<\tan x<1$ より

$0 < \dfrac{1-\tan^2 x}{2} < \dfrac{1}{2}$ だから

$\boxed{0} < \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} < \boxed{\dfrac{1}{2}}$ となる ―②

テは⓪ トは⑤

(3) $0<x<\frac{\pi}{4}$ のとき $\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) = \tan 89^\circ$ をみたす x は

$2x = \dfrac{\pi}{180}$ より $x = \dfrac{\pi}{\boxed{360}}$

ナニヌ

②を用いると $0 < \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{180}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{360}\right)} < \dfrac{1}{2}$ だから

$0 < \dfrac{\tan 89^\circ}{\tan 89.5^\circ} < \dfrac{1}{2}$

よって $0 < \dfrac{57.29}{\tan 89.5} < \dfrac{1}{2}$ より

$\dfrac{\tan 89.5^\circ}{57.29} > 2$

$\tan 89.5^\circ > 2\times 57.29 = 114.58$

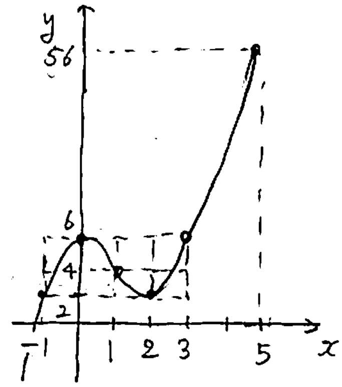
ゆえに $\tan 89.5^\circ$ は $\boxed{110\text{以上}}$ となる

ネは⑨

解答記号	正解	配点
タ	8	2
チ	b	2
ツ	6	3
テト	05	3
ナニヌ	360	2
ネ	9	3

15点

第２問



(1)　$f(x)=x^3-3x^2+6$ より

$f'(x)=\underset{ア}{\boxed{3}}x^2-\underset{イ}{\boxed{6}}x \quad =3x(x-2)$

$x=\underset{ウ}{\boxed{0}}$ で極大値 $\underset{エ}{\boxed{6}}$

$x=\underset{オ}{\boxed{2}}$ で極小値 $f(2)=8-12+6=\underset{カ}{\boxed{2}}$ をとる

$3 \leqq x \leqq 5$ では　$x=\overset{キ}{\boxed{5}}$ で最大値をとり　$(f(5)=125-75+6=56)$

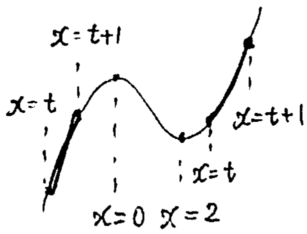
$x=\underset{ク}{\boxed{3}}$ で最小値をとる　$(f(3)=6)$

$1 \leqq x \leqq 3$ では　$x=\underset{ケ}{\boxed{3}}$ で最大値をとり　$(f(3)=6)$

$x=\underset{コ}{\boxed{2}}$ で最小値をとる　$(f(2)=2)$

(2)　$t \leqq x \leqq t+1$ での $f(x)$ の最大値 $M(t)$，最小値 $m(t)$

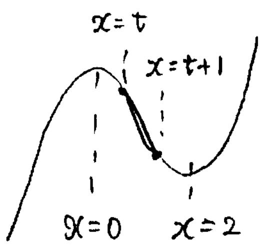
ⓐ　$M(t)=f(t+1)$ かつ $m(t)=f(t)$ となるとき



$t+1 \leqq 0$ または $2 \leqq t$ より

$t \leqq \underset{サシ}{\boxed{-1}}$ または $\underset{ス}{\boxed{2}} \leqq t$

ⓑ　$M(t)=f(t)$ かつ $m(t)=f(t+1)$ となるとき



$0 \leqq t$ かつ $t+1 \leqq 2$ より

$\underset{セ}{\boxed{0}} \leqq t \leqq \underset{ソ}{\boxed{1}}$

このとき $M(t)-m(t)=f(t)-f(t+1)$

$=t^3-3t^2+6-\{(t+1)^3-3(t+1)^2+6\}$

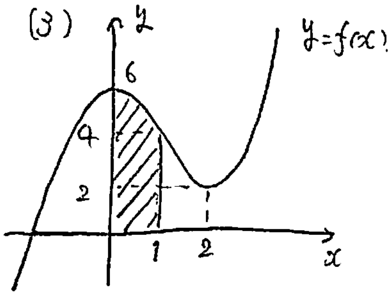
$=\cancel{t^3}\cancel{-3t^2}\cancel{+6}-\{\cancel{t^3}+3t^2+3t+1\cancel{-3t^2}-6t-3\cancel{+6}\}$

$=-3t^2+3t+2$

$=-3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$ は

$t=\boxed{\frac{1}{2}}$ で最大値をとる　(タ, チ)

(3)



左の部分の面積を S_1 とすると

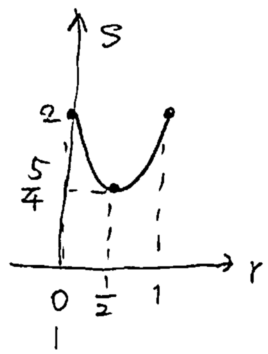
$$S_1=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x^3-3x^2+6)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+6x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}-1+6=\boxed{\frac{21}{4}}$$ ツテ ト

(4)(i) $g(x)=x^3-6x^2+6x+2$, $f(x)=x^3-3x^2+6$ より

$$f(x)-g(x)=(x^3-3x^2+6)-(x^3-6x^2+6x+2)$$
$$=3x^2-6x+4$$ ナ は⓪
$$=3(x-1)^2+1>0$$ よって $\boxed{\text{常に正}}$

よってすべての実数 r で $S=\boxed{\int_r^{r+1}\{f(x)-g(x)\}dx}$ ニ は④

(ii) $$S=\int_r^{r+1}\{3(x-1)^2+1\}dx$$
$$=\left[(x-1)^3+x\right]_r^{r+1}$$
$$=r^3-(r-1)^3+(r+1)-r$$
$$=3r^2-3r+2=f(r+1)-f(r)+4$$
$$=3\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$ なので



$0\leqq r\leqq 1$ では $\boxed{\text{減少してから増加する}}$

ヌ は③

解答記号	正解	配点
アイ	36	2
ウエ	06	2
オカ	22	2
キク	53	2
ケコ	32	2
サシス	−12	2
セソ	01	2
タチ	12	2
ツテト	214	4
ナ	0	3
ニ	4	3
ヌ	3	4

30点

第３問

(1) $q=f(p)={}_3C_{\boxed{1}}\,p(1-p)^{3-1}=3p(1-p)^2$
ア

$f\left(\frac{1}{3}\right)=3\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\boxed{\frac{4}{9}}$ イ ウ

(2) $q=\frac{2}{9}$ とすると $3p(1-p)^2=\frac{2}{9}$ より

$27p(p^2-2p+1)=2$

$27p^3-54p^2+27p-2=0$

$\left(p-\frac{2}{3}\right)(27p^2-36p+3)=0$

$\left(p-\boxed{\frac{2}{3}}\right)(9p^2-12p+1)=0$ エ オ

$\frac{2}{3}$	27	−54	27	−2
		18	−24	2
	27	−36	3	

(3) (i) 3人のうち1人だけが回答するグループ数Xは

二項分布 $B(\boxed{100}, q)$ に従う

カ は③

(ii) 3人からなる1組のグループではいと回答する人数Yは

二項分布 $B(\boxed{3}, p)$ に従う

キ は⓪ ク は⓪

このとき $E(Y_1)=E(Y_2)=\cdots=E(Y_{100})=\boxed{3}p$

$\overline{Y}=1.96$ 標本標準偏差 $S=0.90$

3pに対する95%の信頼区間 $L\leqq 3p\leqq U$ とすると

$P(L\leqq 3p\leqq U)=P\left(\frac{L}{3}\leqq p\leqq\frac{U}{3}\right)=0.95$

ここで $1.96\times\frac{S}{\sqrt{100}}=1.96\times\frac{0.90}{10}=1.96\times0.09=0.1764$ より

$1.96-0.1764\leqq 3p\leqq 1.96+0.1764$ より

$1.7836\leqq 3p\leqq 2.1364$

$0.5945\leqq p\leqq 0.7123$

ゆえに $\boxed{0.59\leqq p\leqq 0.71}$ とできる

ケ は①

解答記号	正解	配点
ア	1	2
イウ	49	3
エオ	23	3
カ	3	2
キ	0	2
ク	0	3
ケ	1	5

20点

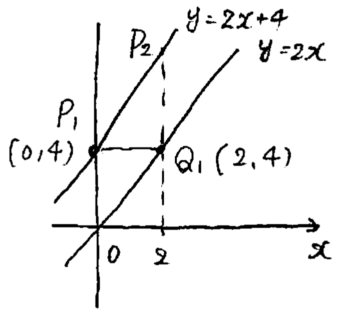
第４問

解答記号	正解	配点
アイ	24	1
ウエ	28	1
オ	2	2
カ	7	2
キ	0	2
クケコサシ	4-124	2
スセソタチ ツテ	43-12 83	3
ト	0	2
ナ	0	2
ニ	7	3

20点

(1) $\begin{cases} y=2x & \text{— ①} \\ y=mx+4 & \text{— ②} \end{cases}$ で $m=2$ なら

②は $y=2x+4$ であり Q_1 は $(\underset{ア}{\boxed{2}},\underset{イ}{\boxed{4}})$ P_2 は $(\underset{ウ}{\boxed{2}},\underset{エ}{\boxed{8}})$ となる



P_n の y 座標を a_n とすると

Q_n の x 座標は $a_n=2y$ より $y=\boxed{\dfrac{a_n}{2}}$

$\boxed{オ}$ は②

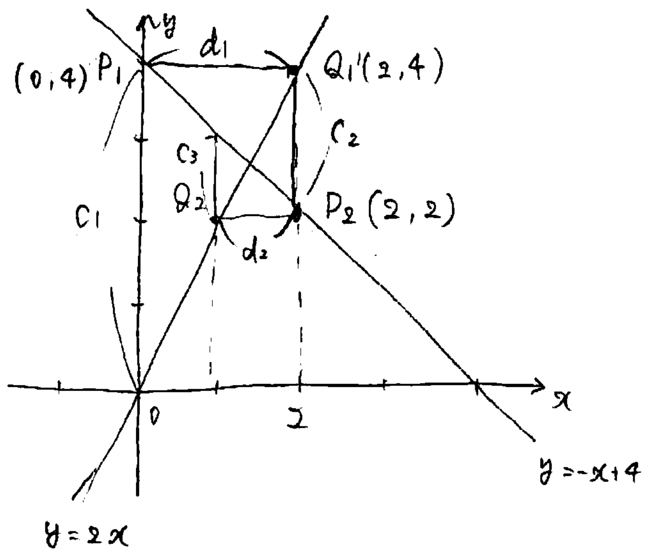
よって P_{n+1} の y 座標 a_{n+1} は

$$a_{n+1}=2\times\frac{a_n}{2}+4=\boxed{a_n+4}\quad \boxed{カ}\text{ は⑦}$$

よって $\{a_n\}$ は 初項4, 公差4 の 等差数列より

$$a_n=4+4(n-1)=\boxed{4n}\quad \boxed{キ}\text{ は⓪}$$

(2) $m=-1$ とすると ② $y=-x+4$



(i) P_n の y 座標を b_n とすると

$b_1=\underset{ク}{\boxed{4}}$ であり

Q_n の x 座標は $b_n=2y$ より $y=\dfrac{b_n}{2}$

よって P_{n+1} の y 座標 b_{n+1} は

$$b_{n+1}=\overset{ケコ}{\underset{サ}{\boxed{\frac{-1}{2}}}}b_n+\overset{シ}{\boxed{4}}\quad \text{となる}$$

両辺から $\dfrac{8}{3}$ ひいて

$$b_{n+1}-\frac{8}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{8}{3}\right)$$

$c=-\frac{1}{2}c+4$ として

$\frac{3}{2}c=4$

$c=\frac{8}{3}$

よって $b_n-\dfrac{8}{3}=\left(b_1-\dfrac{8}{3}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\left(4-\dfrac{8}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ より

$$b_n=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\boxed{\frac{4}{3}}\left(\boxed{\frac{-1}{2}}\right)^{n-1}+\boxed{\frac{8}{3}}$$

(ス/セ, ソタ/チ, ツ/テ)

$\boxed{ト}$ は⓪

(ii) $d_n=\boxed{\frac{1}{2}c_n}$ である。また $c_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ であるので $c_n+d_n=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$c_{n+1}=\boxed{\frac{1}{2}c_n}$ $\boxed{ナ}$ も⓪

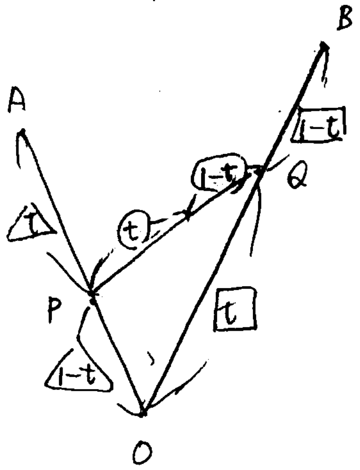
$=6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって $S_n=(c_1+d_1)+(c_2+d_2)+\cdots+(c_n+d_n)$ は 初項 $6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=6$

項数 n, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の和より

$$S_n=\frac{6\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\boxed{12\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}\quad \boxed{ニ}\text{ は⑦ となる}$$

第５問



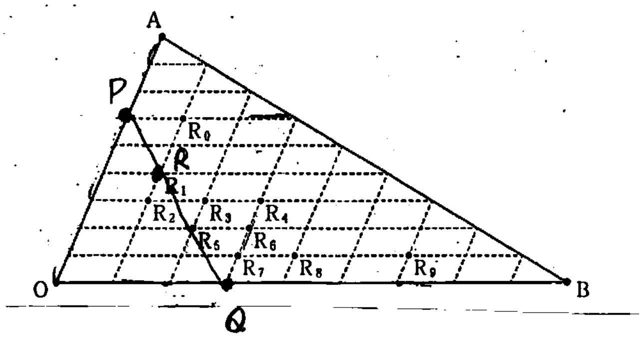
(1) $\overrightarrow{OP} = \boxed{(1-t)}\vec{a}$　　ア は②

$\overrightarrow{OQ} = \boxed{t}\vec{b}$　　イ は⓪

$\overrightarrow{OR} = (1-t)\overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{OQ}$

$= \boxed{(1-t)^2}\vec{a} + \boxed{t^2}\vec{b}$

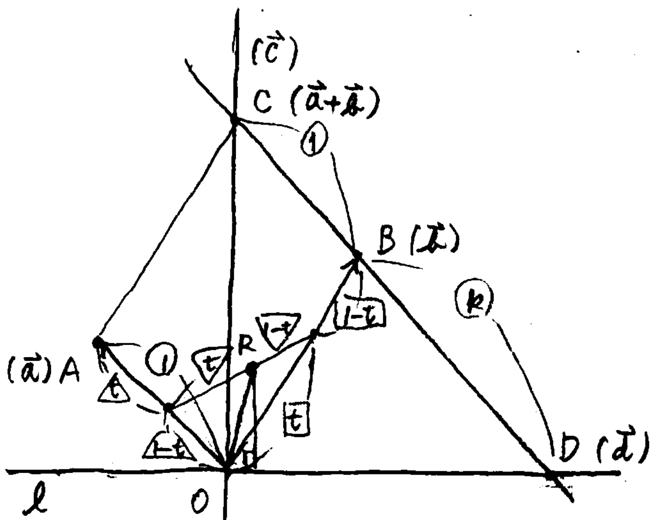
ウ は⑦　　エ は④



(2) $t = \frac{1}{3}$ のとき左のようになる

R は $\boxed{R_1}$ の位置となる

オ は①



(3) (i) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{CB}$

$= \vec{b} + k(-\vec{a})$

$= \boxed{-k\vec{a} + \vec{b}}$　　カ は②　であり

$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OD}$ より $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$ だから

$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (-k\vec{a}+\vec{b}) = 0$

$k\{|\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b}\} = \vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

よって $k = \boxed{\dfrac{|\vec{b}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b}}}$　　キ は④

(ii) $\begin{cases} \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} & \text{—①} \\ \vec{d} = -k\vec{a} + \vec{b} & \text{—②} \end{cases}$　であり

①−② より $\vec{c} - \vec{d} = (1+k)\vec{a}$　　ク は①

よって $\vec{a} = \dfrac{1}{k+1}\left(\boxed{\vec{c} - \vec{d}}\right)$

また ①×k+② より $k\vec{c} + \vec{d} = (k+1)\vec{b}$

よって $\vec{b} = \dfrac{1}{k+1}\left(\boxed{k\vec{c} + \vec{d}}\right)$

ケ は③

これから $\overrightarrow{OR} = (1-t)^2\vec{a} + t^2\vec{b}$

$$= \frac{1}{k+1}\{(1-t)^2\vec{c} - (1-t)^2\vec{d} + t^2k\vec{c} + t^2\vec{d}\}$$

$$= \frac{1}{k+1}\{(\boxed{1+k})t^2 - \boxed{2}t + \boxed{1}\}\vec{c}$$

コは⑤　サは②　シは①

$$+ \frac{1}{k+1}(\boxed{2}t - \boxed{1})\vec{d}$$

スは②　セは①

(iii)　Rと ℓ の距離が最小になるのは $\overrightarrow{OR}$ の $\vec{c}$ の係数が最小のときだから

$$(1+k)t^2 - 2t + 1$$
$$= (1+k)\left(t - \frac{1}{1+k}\right)^2 + 1 - \frac{1}{1+k} \quad より$$

$t = \boxed{\dfrac{1}{k+1}}$ のときとなる

ソは⑥

解答記号	正解	配点
ア、イ	2、0	2
ウ、エ	7、4	2
オ	1	3
カ	2	2
キ	4	2
ク	1	2
ケ	3	2
コ、サ、シ、ス、セ	5、2、1、2、1	3
ソ	6	2