®

数　学　Ⅱ　（100点満点）

問題番号(配点)	解答記号	正解	配点
第1問 (30)	ア	3	1
	イウ	10	1
	（エ，オ）	（1，0）	2
	カ	0	3
	キ	5	3
	ク	2	2
	ケ	2	3
	コサ，シ	−2，3	2
	ス，セ	2，1	2
	ソタ	12	1
	チ	3	3
	ツ	1	1
	テ，ト	1，1	2
	ナ	3	1*
	ニヌ	−6	2
	ネノ	14	1
第2問 (30)	$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{3}{2}$	2
	ウ，エ	9，6	1
	$\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$，キ	$\frac{9}{2}$，6	2
	ク	1	1
	$\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$	$\frac{5}{2}$	1
	サ	2	1
	シ	2	1
	ス	3	3
	セ，ソ	0，5	2
	タ	1	2
（第2問）	チ	1	4
	ツ	2	2
	テ	3	1
	ト，ナ	4，2	3
	ニ，ヌ	0，4	2
	ネ	2	2
第3問 (20)	ア	3	2
	イ	9	2
	ウ，エ	5，4	3
	オ	6	2
	カ	6	3
	キ	4	2
	$\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$	$\frac{2}{3}$	2
	コ	9	2
	サ	a	2
第4問 (20)	（ア，イ）	（4，0）	2
	ウ	1	2
	エ	8	2
	オ	b	2
	カ	4	3
	キ	4	3
	$\left(\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}, \frac{\sqrt{\text{コサ}}}{\text{シ}}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$	3
	$\left(\frac{\text{ス}}{\text{セ}}, \frac{\sqrt{\text{ソ}}}{\text{タ}}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$	3

（注）* は，解答記号テ，トが両方正解の場合のみ **3** を正解とし，点を与える。

第1問

解答記号	正解	配点
ア	3	1
イウ	10	1
エオ	10	2
カ	0	3
キ	5	3
ク	2	2
ケ	2	3

15点

(1) (i) $y=\log_3 x$ に $x=27$ 代入して $y=\log_3 27=\boxed{3}$ ア

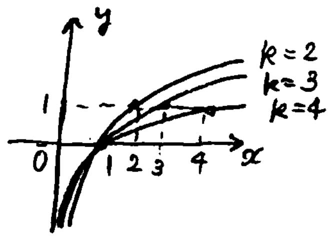
また $y=\log_2\frac{x}{5}$ に $y=1$ 代入して $1=\log_2\frac{x}{5}$ より

$2^1=\frac{x}{5}$ だから $x=\boxed{10}$ イウ

(ii) $y=\log_k x$ のグラフは 定点 $(\boxed{1},\boxed{0})$ を通る
エ オ

(iii) $k=2,3,4$ のとき $y=\log_k x$ は

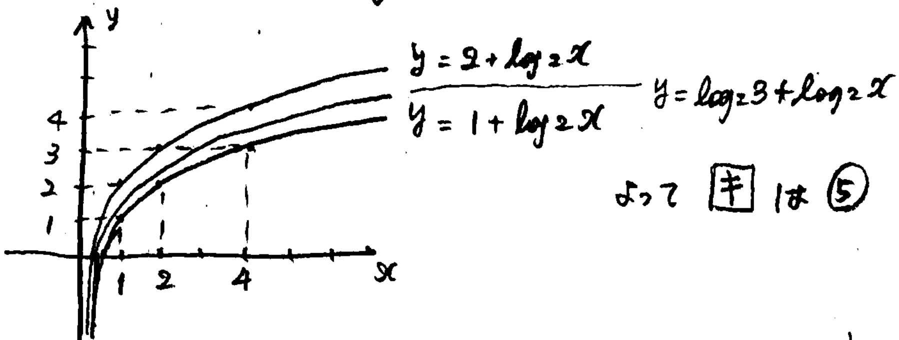
$y=\log_2 x,\ \log_3 x,\ \log_4 x$ であり $\boxed{カ}$ は ⓪



また $y=\log_2 kx$ は $y=\log_2 k+\log_2 x$ より

$y=\log_2 2+\log_2 x,\ \log_2 3+\log_2 x,\ \log_2 4+\log_2 x$ だから

$y=\log_2 x$ を y 軸方向に $1,\ \log_2 3,\ 2$ それぞれ平行移動したもの



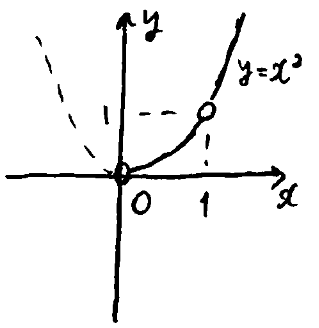
よって $\boxed{キ}$ は ⑤

(2) (i) $\log_x y=2$ のとき 底の条件より $x>0$ かつ $x\neq 1$

真数条件より $y>0$

また $x^2=y$ より下図の実線部

よって $\boxed{ク}$ は ②



(ii) $0<\log_x y<1$ のとき

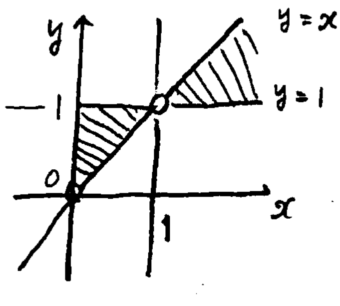
$x>0$ かつ $x\neq 1$ かつ $y>0$ であり

$\log_x 1<\log_x y<\log_x x$ より

$0<x<1$ のとき $1>y>x$

$x>1$ のとき $1<y<x$

よって下図斜線部（境界含まず）



よって $\boxed{ケ}$ は ②

(1)　$S(x)=x^2+4x+7=0$ の解は $x=\boxed{-2}\pm\sqrt{\boxed{3}}\,i$
コサ　シ

$P(x)=2x^3+7x^2+10x+5$

$=(x^2+4x+7)(2x-1)+12$ より

$$\begin{array}{r|rrrr} & & & 2 & -1 \\ \hline 1\ 4\ 7 & 2 & 7 & 10 & 5 \\ & 2 & 8 & 14 & \\ \hline & & -1 & -4 & 5 \\ & & -1 & -4 & -7 \\ \hline & & & & 12 \end{array}$$

ス　セ

$T(x)=\boxed{2}x-\boxed{1}$

$U(x)=\boxed{12}$ ソタ

(2) (i) $P(x)=S(x)\times T(x)+U(x)$ において余り $U(x)$ が定数 k なら

$P(x)=S(x)T(x)+k$ であり

$S(x)=0$ は異なる2解 α,β をもつから

$S(\alpha)=S(\beta)=0$

よって $P(\alpha)=S(\alpha)T(\alpha)+k=k$

$P(\beta)=S(\beta)T(\beta)+k=k$ となる

ゆえに $\boxed{チ}$ は ③ であり

$P(\alpha)=P(\beta)=k$ より $\boxed{ツ}$ は ①

(ii) 逆に $P(\alpha)=P(\beta)$ がなりたつとき

$S(x)$ は2次式だから $U(x)=mx+n$ （m,n 定数）とおけて

$P(x)=\boxed{S(x)T(x)+mx+n}$ $\boxed{テ}$ は ① だから

$$\begin{cases} P(\alpha)=S(\alpha)T(\alpha)+m\alpha+n \\ P(\beta)=S(\beta)T(\beta)+m\beta+n \end{cases}$$ であり

$S(\alpha)=S(\beta)=0$ より $\boxed{\begin{cases} P(\alpha)=m\alpha+n \\ P(\beta)=m\beta+n \end{cases}}$ $\boxed{ト}$ は ①

また $P(\alpha)=P(\beta)$ より $m\alpha=m\beta$ だから

$m(\alpha-\beta)=0$

$\alpha\neq\beta$ より $\boxed{m=0}$ $\boxed{ナ}$ は ③　よって余りは定数となる

(i)(ii)から $S(x)=0$ が異なる2解 α,β をもつとき

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと

$P(\alpha)=P(\beta)$ であることは同値となる

(3)　$P(x) = x^{10} - 2x^9 - px^2 - 5x$　（pは定数）

$S(x) = x^2 - x - 2$ のとき　$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ より

$S(x) = 0$ は2解 $x = 2, -1$ をもつので

$P(x)$ を $S(x)$ でわった余りが定数のとき

$P(2) = P(-1)$ より

$\cancel{2^{10}} - \cancel{2 \times 2^9} - p \times 2^2 - 5 \times 2 = (-1)^{10} - 2 \times (-1)^9 - p \times (-1)^2 - 5 \times (-1)$ だから

$-4p - 10 = 1 + 2 - p + 5$

$-3p = 18$

よって　$p = \underset{ニヌ}{\boxed{-6}}$

このとき $P(2) = P(-1) = k$ より

$P(2) = -4p - 10 = -4 \times (-6) - 10 = \overset{ネノ}{\boxed{14}}$ となる

解答記号	正解	配点
コサシ	−23	2
スセ	21	2
ソタ	12	1
チ	3	3
ツ	1	1
テト	11	2
ナ	3	1
ニヌ	−6	2
ネノ	14	1
		15点

（テトも合っていて1点）

第2問

(1) $f(x)=3(x-1)(x-2)$ のとき

(i) $f(x)=3(x^2-3x+2)$ より $f'(x)=3(2x-3)$

よって $f'(x)=0$ となる x は $x=\boxed{\dfrac{3}{2}}$ アイ

(ii) $S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

$=\int_0^x (3t^2-\underset{ウ}{\boxed{9}}t+\underset{エ}{\boxed{6}})\,dt$

$=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^x$

$=x^3-\boxed{\dfrac{9}{2}}x^2+\boxed{6}x$ である。（オカ、キ）

また $S'(x)=f(x)=3(x-1)(x-2)$ であるので

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(x)$	+	0	−	0	+
$S(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x=\boxed{1}$ ク で $S(x)$ は極大値をとり、その値は

$S(1)=1-\frac{9}{2}+6=\boxed{\dfrac{5}{2}}$ ケコ

$x=\boxed{2}$ サ で $S(x)$ は極小値をとり、その値は

$S(2)=8-\frac{9}{2}\times 4+6\times 2$

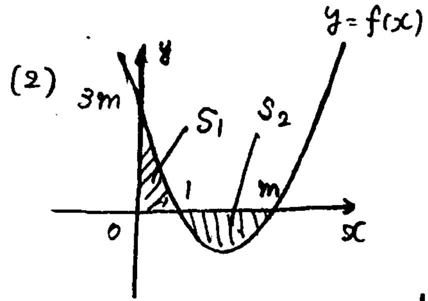
$=8-18+12=\boxed{2}$ シ

(iii) $S'(x)=f(x)$ より $S'(3)=f(3)$ よって

$f(3)$ は $\boxed{y=S(x)\text{ のグラフ上の}(3, S(3))\text{での接線の傾きに等しい}}$

$\boxed{ス}$ は ③

(2)



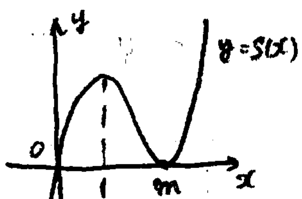
$S_1=\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx}$ $\boxed{セ}$ は ⓪

$S_2=\boxed{\int_1^m \{-f(x)\}\,dx}$ $\boxed{ソ}$ は ⑤

$S_1=S_2$ のとき $\int_0^1 f(x)\,dx=-\int_1^m f(x)\,dx$ より

$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^m f(x)\,dx=0$

よって $\boxed{\int_0^m f(x)\,dx=0}$ $\boxed{タ}$ は ①



ゆえに $S(m)=\int_0^m f(x)\,dx=0$ より

$y=S(x)$ のグラフは左のようになり

$\boxed{チ}$ は ①

解答記号	正解	配点
アイ	32	2
ウエ	96	1
オカキ	926	2
ク	1	1
ケコ	52	1
サ	2	1
シ	2	1
ス	3	3
セソ	05	2
タ	1	2
チ	1	4
ツ	2	2
テ	3	1
トナ	42	3
ニヌ	04	2
ネ	2	2

30点

また　$S_1 > S_2$ のとき　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx > \int_1^m \{-f(x)\}\,dx$ より

$$\int_0^m f(x)\,dx > 0$$

よって　$S(m) = \displaystyle\int_0^m f(t)\,dt > 0$ である

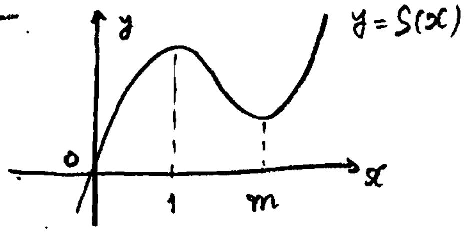
また $S'(x) = f(x) = 3(x-1)(x-m)$ より

x	$\cdots$	1	$\cdots$	m	$\cdots$
$S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x=1$ で極大値　$S(1)$

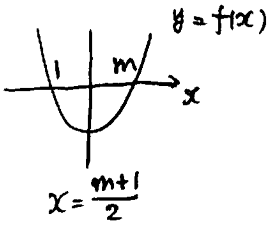
$x=m$ で極小値　$S(m)$　となる

$S(m)>0$ よりグラフは下のようになる



よって $\boxed{\text{ツ}}$ は ②

(3)



$y=f(x)$ のグラフは　$x = \boxed{\dfrac{m+1}{2}}$　$\boxed{\text{テ}}$ は ③　に関して対称であるから

$$\int_{1-p}^{1} f(x)\,dx = \int_m^{\boxed{m+p}} f(x)\,dx \quad \text{— ①}$$ $\boxed{\text{ト}}$ は ④　がなりたち

$M = \dfrac{m+1}{2}$　とおくと　$0 < q \leqq M-1$ のすべての q に対して

$$\int_{M-q}^{M} \{-f(x)\}\,dx = \int_M^{\boxed{M+q}} \{-f(x)\}\,dx \quad \text{— ②}$$ $\boxed{\text{ナ}}$ は ②　がなりたつ

すべての実数 α, β に対して　$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = S(\beta) - S(\alpha)$　であることをつかうと

① は　$S(1) - S(1-p) = S(m+p) - S(m)$　より

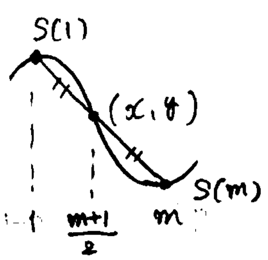
$$S(1-p) + S(m+p) = \boxed{S(1) + S(m)}$$ $\boxed{\text{ニ}}$ は ⓪

② は　$S(M) - S(M-q) = S(M+q) - S(M)$ より

$$2S(M) = \boxed{S(M+q) + S(M-q)}$$ $\boxed{\text{ヌ}}$ は ④

よって　$p>0$ の p に対して 2点 $(1-p,\ S(1-p))$，$(m+p,\ S(m+p))$ の中点を

(x, y) とすると　$x = \dfrac{(1-p)+(m+p)}{2} = \dfrac{m+1}{2}$



$y = \dfrac{S(1-p)+S(m+p)}{2} = \dfrac{S(1)+S(m)}{2}$　であるから

(x, y) は $\boxed{\text{pの値によらず一つに定まり } y=S(x) \text{ 上となる}}$

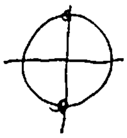
$\boxed{\text{ネ}}$ は ②

第3問

解答記号	正解	配点
ア	3	2
イ	9	2
ウエ	54	3
オ	6	2
カ	6	3
キ	4	2
クケ	23	2
コ	9	2
サ	a	2

20点

(1) $\cos x = 0$ の $0 \leqq x < 2\pi$ での解は $x = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ と $x = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$



ア は ③　　イ は ⑨

(2) (i) $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$ — ①　$(0 \leqq x < 2\pi)$ について

$\cos 3x = \cos(2x + x) = \boxed{\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x}$ ウ は ⑤

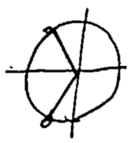
$\cos x = \cos(2x - x) = \boxed{\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x}$ エ は ④

よって ① は　$2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 0$ より

$(\boxed{2\cos x} + 1)\cos 2x = 0$ だから

オ は ⑥

$\cos x = -\frac{1}{2}$ または $\cos 2x = 0$ であり



$\cos x = -\frac{1}{2}$ より　$x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$\cos 2x = 0$ より　$2x = \frac{\pi}{2} + n\pi$　(nは整数) であり

$x = \frac{1+2n}{4}\pi$ となり　$0 \leqq x < 2\pi$ より

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

ゆえに ① は $\overset{カ}{\boxed{6}}$ 個 の解をもち，最も小さい解は $x = \frac{\pi}{\boxed{4}_{キ}}$

2番目に小さい解は $x = \frac{\boxed{2}^{ク}}{\boxed{3}_{ケ}}\pi$

(ii) $\cos(n+1)x + \cos nx + \cos(n-1)x = 0$ — ③　$(0 \leqq x < 2\pi,\ n \geqq 3$ でnは自然数$)$

(i) と同様に　$\cos(n+1)x = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x$

$\cos(n-1)x = \cos nx \cos x + \sin nx \sin x$　だから 辺をたして

$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cos x$.

よって ③ は　$(2\cos x + 1)\cos nx = 0$ であるので

$\cos x = -\frac{1}{2}$ または $\cos nx = 0$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ より　$x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$\cos nx = 0$ より　$nx = \frac{\pi}{2} + l\pi$　(lは整数) であり

$x = \frac{1+2l}{2n}\pi$ となり　$0 \leqq x < 2\pi$ より $x = \frac{1}{2n}\pi, \frac{3}{2n}\pi, \frac{5}{2n}\pi, \cdots, \frac{4n-1}{2n}\pi$

$n \geqq 3$ より　$\frac{1}{2n}\pi < \frac{3}{2n}\pi < \frac{2}{3}\pi$ より　最も小さい解は $\boxed{\frac{\pi}{2n}}$，2番目に小さい解は $\boxed{\frac{3}{2n}\pi}$ となる

コ は ⑨　　サ は ⓐ

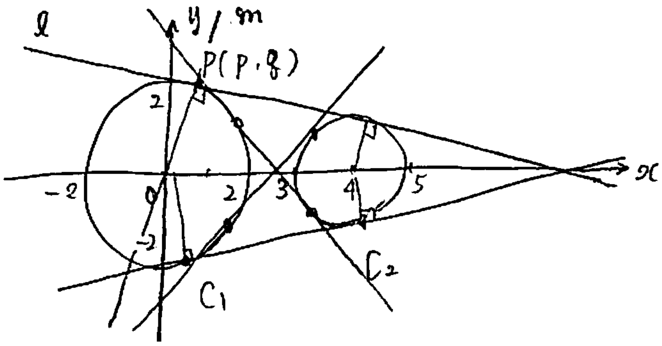
第4問

(1) $C_1: x^2+y^2=4$

$C_2: x^2-8x+y^2+15=0$

C_2は $(x-4)^2+y^2=1$ より 中心 $(\underset{ア}{\boxed{4}}, \underset{イ}{\boxed{0}})$, 半径$\underset{ウ}{\boxed{1}}$の円

(2)



C_1上の点 $P(p, q)$におけるC_1の接線をℓとすると $p^2+q^2=4$がなりたつ

(i) $p \neq 0$かつ$q \neq 0$のとき

mを $y=\boxed{\frac{q}{p}}x$ とすると ℓの傾きは $\boxed{-\frac{p}{q}}$

$\boxed{エ}$は⑧ $\boxed{オ}$は⑧

よってℓは傾き$-\frac{p}{q}$で$P(p, q)$を通る直線だから

$y=-\frac{p}{q}(x-p)+q$ より

$qy=-p(x-p)+q^2$

よって $px+qy=p^2+q^2=4$ より $\boxed{px+qy=4}$ $\boxed{カ}$は④

$p=0$または$q=0$でも $px+qy=4$はC_1の接線である

(ii) ℓがC_2に接するのは $\boxed{C_2\text{の中心と}\ell\text{の距離が}C_2\text{の半径に等しい}}$ ときである

$\boxed{キ}$は④

よって $\dfrac{|4p-4|}{\sqrt{p^2+q^2}}=1$ より $4|p-1|=\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{4}=2$

よって $|p-1|=\frac{1}{2}$ より

$p-1=\pm\frac{1}{2}$ だから $p=1\pm\frac{1}{2}$ ゆえに $p=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$p=\frac{1}{2}$のとき $q^2=4-p^2=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$より $q=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

$p=\frac{3}{2}$のとき $q^2=4-p^2=4-\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$より $q=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

よって $(p, q)=\left(\boxed{\frac{1}{2}}, \boxed{\frac{\sqrt{15}}{2}}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), \left(\boxed{\frac{3}{2}}, \boxed{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ となり

(ク/ケ, コサ/シ, ス/セ, ソ/タ)

$px+qy=4$に代入して 接線が得られる

解答記号	正解	配点
アイ	40	2
ウ	1	2
エ	8	2
オ	8	2
カ	4	3
キ	4	3
クケコサシ	12152	3
スセソタ	3272	3
		20点