

$$(1) x^4 + bx^2 + c^2 = 0 \quad (*)$$

$$(x^2 + c)^2 - 2cx^2 + bx^2 = 0$$

$$(x^2 + c)^2 - (2c - b)x^2 = 0$$

$$\{(x^2 + c) + \sqrt{2c - b}x\} \{(x^2 + c) - \sqrt{2c - b}x\} = 0$$

$$(x^2 + \sqrt{2c - b}x + c)(x^2 - \sqrt{2c - b}x + c) = 0$$

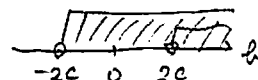
$$\therefore x = \frac{-\sqrt{2c - b} \pm \sqrt{(2c - b) - 4c}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2c - b} \pm \sqrt{(2c - b) - 4c}}{2} \quad \text{より}$$

$$x = \frac{-\sqrt{2c - b} \pm \sqrt{-2c - b}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2c - b} \pm \sqrt{-2c - b}}{2} \quad \text{となる}$$

これがすべて虚数解となるから $2c - b < 0$ または $-2c - b < 0$ であるので

$2c < b$ または $-2c < b$ となるが

c は正より $-2c < b$ となる ①



但し、 $2c - b = 0$ または $-2c - b = 0$ のとき、

つまり $b = \pm 2c$ のときは異なる4つの解をもたない ②

①②より $x^4 + bx^2 + c = 0$ が異なる4つの虚数解をもつ条件は
($c > 0$) $-2c < b < 2c, 2c < b$ となる

$$(2) (1) \text{より} \quad x = \frac{\pm \sqrt{2c - b} \pm \sqrt{-2c - b}}{2} \quad (\text{複号任意}) \quad \text{となる}$$

$$\left(\begin{array}{l} -2c < b < 2c \text{ のとき } x = \frac{\pm \sqrt{2c - b} \pm \sqrt{2c + b}i}{2} \quad (\text{複号任意}) \\ 2c < b \text{ のとき } x = \frac{\pm \sqrt{-2c + b}i \pm \sqrt{2c + b}i}{2} \quad (\text{複号任意}) \end{array} \right)$$

$$(3) (i) -2c < b < 2c \text{ のとき } x = \frac{\pm \sqrt{2c - b} \pm \sqrt{2c + b}i}{2} \quad (\text{複号任意}) \text{ であり}$$

$$|x| = \frac{2c - b}{4} + \frac{2c + b}{4} = \frac{4c}{4} = c (> 0) \text{ であり すべて一定となるから}$$

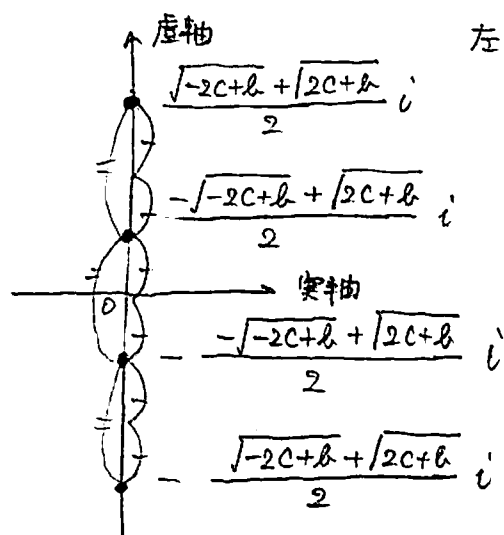
中心原点、半径 c の同一円周上に必ず解は存在する

$$(ii) 2c < b \text{ のとき } x = \frac{\pm \sqrt{-2c + b}i \pm \sqrt{2c + b}i}{2} \quad (\text{複号任意}) \text{ であるので}$$

4つの虚数解は虚軸上に並ぶ。

以上のことから 4個の解が複素数平面上で同一円周上に並ぶ条件は
 $-2c < b < 2c$ となる

(4) (3) より $2C < b$ のとき 4つの虚数解は 虚軸上に並び $C > 0$ より



左のように並び

$$\text{よって } \frac{\sqrt{-2C+b} + \sqrt{2C+b}}{2} = 3 \times \frac{-\sqrt{-2C+b} + \sqrt{2C+b}}{2} \quad \text{より}$$

$$2\sqrt{-2C+b} = \sqrt{2C+b}$$

両辺2乗して

$$4(-2C+b) = 2C+b \quad \text{より}$$

$$3b = 10C$$

ゆえに $\boxed{b = \frac{10}{3}C}$ となる