

(1) 試行 S を 1 回だけ行い、数字の和が偶数となるのは

2枚とも偶数のときと 2枚とも奇数のときがあるのて

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2} + \frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2} = 2 \times \frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2} = 2 \times \frac{\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1}} = 2 \times \frac{5 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

(2) 試行 S を 3 回つづけて行うとき、2 個以上の偶数が記録されているのは

(i) 3 個とも偶数のとき

$$\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{64}{729}$$

(ii) 2 個だけ偶数のとき

$${}_3C_1 \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{5}{9}\right) = \frac{240}{729}$$

$$\text{よって求める確率は } \frac{64}{729} + \frac{240}{729} = \boxed{\frac{304}{729}}$$

(3) 試行 S を 100 回つづけて行うとき、ちょうど k 個の偶数が記録されている

確率 P_k は $P_k = {}_{100}C_k \left(\frac{4}{9}\right)^k \left(\frac{5}{9}\right)^{100-k}$ より $(0 \leq k \leq 100)$

$$P_k = \frac{100!}{k!(100-k)!} \times \frac{4^k \cdot 5^{100-k}}{9^{100}} \quad \text{よあるから}$$

$$1 \leq k \leq 100 \text{ のとき } \frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{\cancel{100!}}{k!(100-k)!} \times \frac{4^k \cdot 5^{100-k}}{\cancel{9^{100}}} \times \frac{(k-1)!(100-(k-1))!}{100!} \times \frac{\cancel{9^{100}}}{4^{k-1} \cdot 5^{100-(k-1)}}$$

$$= \frac{(101-k) \cdot 4}{k \cdot 5} = \boxed{\frac{4(101-k)}{5k}} \quad \text{となる}$$

$$(4) \frac{P_k}{P_{k-1}} > 1 \text{ とすると } \frac{4(101-k)}{5k} > 1 \quad \text{よあり } k > 0 \text{ より}$$

$$4(101-k) > 5k \quad \text{よ } k < \frac{404}{9} = 44 + \frac{8}{9}$$

$$\text{よ } \frac{P_k}{P_{k-1}} > 1 \text{ とすると } k > \frac{404}{9} = 44 + \frac{8}{9}$$

$$\text{よ } k=1, 2, 3, \dots, 44 \text{ で } P_{k-1} < P_k$$

$$k=45, 46, \dots, 100 \text{ で } P_{k-1} > P_k \quad \text{よある}$$

$$P_0 < P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_{43} < P_{44} > P_{45} > P_{46} > \dots > P_{100} \quad \text{よあるから}$$

$$P_k \text{ が最大となる } k \text{ の値は } \boxed{k=44}$$