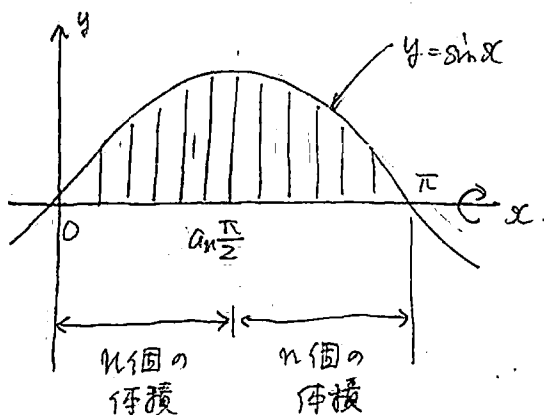




全体の体積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \pi \sin^2 x dx &= \pi \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx \\ &= \pi \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} \\ &= \boxed{\frac{\pi^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{また } a_n \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ とき}$$

$$\sin a_n \leq \sin x \leq \sin \frac{\pi}{2} \text{ だから } \frac{\pi^2}{2} \times \frac{1}{2n} = \frac{\pi^2}{4n} \text{ 以上}$$

半径 $\sin a_n$, 高さ $\frac{\pi}{2} - a_n$ の円柱の体積で

はさみこめるから

$$\pi (\sin^2 a_n) \times \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right) < \frac{\pi^2}{4n} < \pi \times 1^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right) \text{ より}$$

$$(\sin^2 a_n) \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right) < \frac{\pi}{4n} < \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right)$$

$$\therefore (\sin^2 a_n) \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right) < \frac{\pi}{4n} \text{ より } n \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right) < \frac{\pi}{4(\sin^2 a_n)} \quad (\sin^2 a > 0 \text{ より})$$

$$\text{また } \frac{\pi}{4n} < \frac{\pi}{2} - a_n \text{ であるから } \frac{\pi}{4} < n \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right) \text{ である}$$

$$\text{よって } \frac{\pi}{4} < n \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right) < \frac{\pi}{4 \sin^2 a_n} \quad \text{--- ① がなりたつ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4 \sin^2 a_n} = \lim_{a_n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4 \sin^2 a_n} = \frac{\pi}{4} \text{ だから}$$

$$\text{はさみうちの原理より } \left[\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right) = \frac{\pi}{4} \right] \text{ となる}$$

(別解) $\int_{a_n}^{\frac{\pi}{2}} \pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{4n}$ であり $F'(x) = \sin^2 x$ とおくと $F(x)$ は x の連続な関数で微分可能

だから、平均値の定理より $\frac{F(\frac{\pi}{2}) - F(a_n)}{\frac{\pi}{2} - a_n} = F'(c) = \sin^2 c$ をみたす c が

$$a_n < c < \frac{\pi}{2} \text{ で存在する. } \therefore \int_{a_n}^{\frac{\pi}{2}} \pi \sin^2 x dx = \pi [F(x)]_{a_n}^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left\{ F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(a_n) \right\} = \frac{\pi^2}{4n} \text{ である} \quad \text{--- ②}$$

③より $F(\frac{\pi}{2}) - F(a_n) = \frac{\pi}{4n}$ であり ②から

$$\left(\frac{\pi}{2} - a_n \right) \sin^2 c = \frac{\pi}{4n} \text{ より } n \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right) = \frac{\pi}{4 \sin^2 c}$$

$$\therefore 0 < \sin^2 a_n < \sin^2 c < \sin^2 \frac{\pi}{2} \text{ より } \frac{\pi}{4 \sin^2 a_n} > \frac{\pi}{4 \sin^2 c} > \frac{\pi}{4 \sin^2 \frac{\pi}{2}} \text{ である}$$

$$\frac{\pi}{4} < n \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right) < \frac{\pi}{4 \sin^2 a_n} \quad \text{--- ① がなりたつ}$$

以下本解と同じ