

(1) $z\bar{w} = \bar{z}w$ であり $z \neq 0$ だから $|z|^2 = z\bar{z} \neq 0$ より

両辺 $z\bar{z}$ で割ると $\frac{w}{z} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$ より $\frac{w}{z} = \overline{\left(\frac{w}{z}\right)}$ がなりたつ

$\frac{w}{z}$ とその共役複素数が等しいから $\frac{w}{z}$ は実数である

よって $\frac{w}{z} = k$ (k は実数) とおける

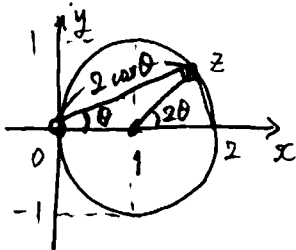
$w = kz$ (k は実数) となる

ここで $z \neq 0$ より $0, z, w$ の 3 点がすべて同一直線上になることはない

($k=0$ のときは, $w=0, z \neq 0$ となる)

以上のことから $0, z, w$ は同一直線上に存在する

(2) $|z-1|=1$ より z は 中心 1, 半径 1 の円周上の $z \neq 0$ の点であるから 左下図より



$z = (2\cos\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$ ① $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とする

また $w = kz$ (k は実数) と $|z-w|=2$ より

$|z-kz|=2$ から

$|1-k||z|=2$ であり ①より $|z|=2\cos\theta$ だから

$|1-k| \times 2\cos\theta = 2$ より

$1-k = \pm \frac{1}{\cos\theta}$

よって $k = 1 \mp \frac{1}{\cos\theta}$ (以下 符号同順) となるので

$w = kz = \left(1 \mp \frac{1}{\cos\theta}\right) \times (2\cos\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2(\cos\theta \mp 1)(\cos\theta + i\sin\theta) \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とする

(3) $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta > 0, \sin\theta \geq 0$ であり $\cos\theta + 1 > 1, \cos\theta - 1 \leq 0$ であるから

w の虚数部 $2(\cos\theta \pm 1)\sin\theta$ は $2(\cos\theta + 1)\sin\theta$ のとき最大値をとる

よって $f(\theta) = 2(\cos\theta + 1)\sin\theta$ ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$) とおくと

$f'(\theta) = 2(-\sin\theta) \cdot \sin\theta + 2(\cos\theta + 1)\cos\theta$

$= 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta + \cos\theta)$

$= 2(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1)$

$= 2(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$ であり増減表は

下のようになる

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		↗	最大	↘	

ゆえに $\theta = \frac{\pi}{3}$ で $f(\theta)$ は最大で
 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2} + 1\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

よって w の虚部は

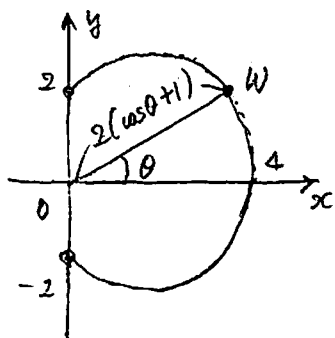
$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき

最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる

参考

$$W = 2(\cos\theta \pm 1)(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \text{なり}$$

$0 < \cos\theta \leq 1$ より $\cos\theta + 1 > 0$, $\cos\theta - 1 < 0$ である



(i) $W = 2(\cos\theta + 1)(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき
左図のようになる

(ii) $W = 2(\cos\theta - 1)(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき

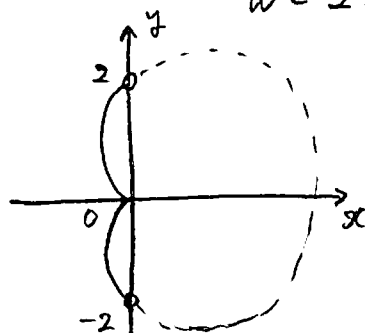
$$= 2(-\cos\theta + 1)(-\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= 2(1 + \cos(\theta \pm \pi))(\cos(\theta \pm \pi) \pm i\sin(\theta \pm \pi)) \quad (\text{複号同順}) \text{ となるから}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \text{ のとき} & W = 2(1 + \cos(\theta + \pi))(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)) \\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき} & W = 2(1 + \cos(\theta - \pi))(\cos(\theta - \pi) + i\sin(\theta - \pi)) \end{array} \right. \quad \text{とすれば}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} < \theta + \pi < \pi \text{ のとき} & W = 2(1 + \cos(\theta + \pi))(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)) \\ -\pi \leq \theta - \pi < -\frac{\pi}{2} \text{ のとき} & W = 2(1 + \cos(\theta - \pi))(\cos(\theta - \pi) + i\sin(\theta - \pi)) \end{array} \right. \quad \text{とすれば}$$

$$W = 2(1 + \cos u)(\cos u + i\sin u) \quad \left(-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < u < \pi\right)$$



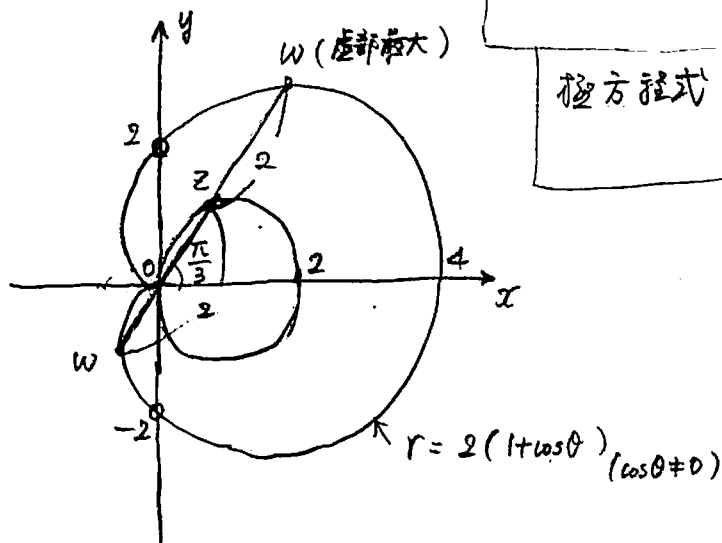
をみたす。

以上のことから W の軌跡は

$$W = 2(1 + \cos\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \left(-\pi \leq \theta < \pi, \text{但し } \theta \neq \pm\frac{\pi}{2}\right) \text{ となる}$$

$$\text{極方程式では } r = 2(1 + \cos\theta) \quad (\text{但し } \cos\theta \neq 0) \text{ となる}$$

(カージオイド)



参考図

