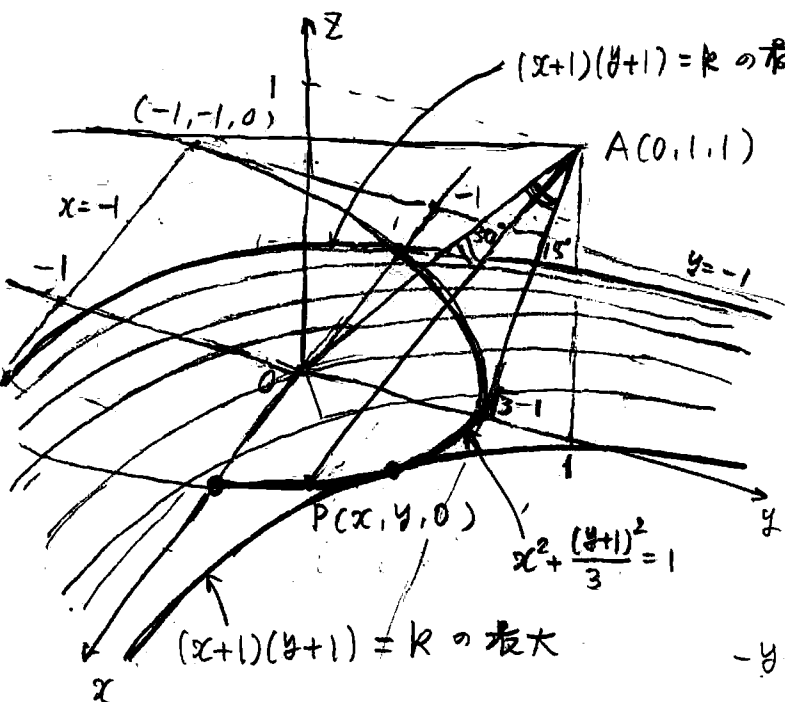




$$\vec{AP} = (x, y-1, -1)$$

$$\vec{AO} = (0, -1, -1) \text{ であり}$$

$$\angle OAP = 30^\circ \text{ より}$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{AO} = |\vec{AP}| |\vec{AO}| \cos 30^\circ \text{ である}$$

$$x \times 0 + (y-1) \times (-1) + (-1) \times (-1)$$

$$= \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (-1)^2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ であり}$$

$$-y+2 = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} \text{ である}$$

$$-2y+4 = \sqrt{6} \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1}$$

両辺2乗して

$$(-2y+4)^2 = 6x^2 + 6(y-1)^2 + 6 \text{ であり}$$

$$4y^2 - 16y + 16 = 6x^2 + 6y^2 - 12y + 6 + 6$$

$$6x^2 + 2y^2 + 4y - 4 = 0$$

$$6x^2 + 2(y+1)^2 = 6$$

$$\text{よって ①内 } x^2 + \frac{(y+1)^2}{3} = 1 \text{ ①上の}$$

$y \geq 0$ の部分をうごく ($z=0$)

ここで $(x+1)(y+1) = k$ とおくと $y+1 = \frac{k}{x+1}$ より $y = \frac{k}{x+1} - 1$

y 軸方向に -1 平行移動したものとみなす

$$\text{①において } y=0 \text{ のとき } x^2 = \frac{2}{3} \text{ より } x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって上の図より $(x, y, z) = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, 0)$ のとき k は最小であり

$$\text{その値は } k = (-\frac{\sqrt{6}}{3} + 1)(0 + 1) = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$$

また ①内 $(x+1)(y+1) = k$ が $x > 0, y > 0$ の部分と接するとき k は最大

その点を $P_1(x_1, y_1, 0)$ とすると xy 平面上で共通接線をもてばよい

$$x^2 + \frac{(y+1)^2}{3} = 1 \text{ の両辺 } x \text{ で微分して } 2x + \frac{2}{3}(y+1) \frac{dy}{dx} = 0 \text{ より}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{y+1}$$

$$\text{また } y+1 = \frac{k}{x+1} \text{ の両辺 } x \text{ で微分して } \frac{dy}{dx} = -\frac{k}{(x+1)^2}$$

$$\text{この2つが } (x_1, y_1, 0) \text{ で等しいので } -\frac{3x_1}{y_1+1} = -\frac{k}{(x_1+1)^2} \text{ より}$$

$$k(y_1+1) = 3x_1(x_1+1)^2 \text{ ②}$$

$$\text{よって } \begin{cases} x_1^2 + \frac{(y_1+1)^2}{3} = 1 - \textcircled{1}' \\ k(y_1+1) = 3x_1(x_1+1)^2 - \textcircled{2} \\ k = (x_1+1)(y_1+1) - \textcircled{3} \end{cases} \quad \text{③を②に代入}$$

$$\textcircled{3} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入して } (x_1+1)(y_1+1)^2 = 3x_1(x_1+1)^2$$

$$x_1+1 \neq 0 \text{ より } (y_1+1)^2 = 3x_1(x_1+1)$$

$$\text{よって } \textcircled{1}' \text{ は } x_1^2 + x_1(x_1+1) = 1 \text{ より}$$

$$2x_1^2 + x_1 - 1 = 0 \quad \left(2 \times -1 \right)$$

$$(2x_1 - 1)(x_1 + 1) = 0$$

$$x_1 > 0 \text{ より } x_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{これを } \textcircled{1}' \text{ に代入して } \frac{1}{4} + \frac{1}{3}(y_1+1)^2 = 1 \text{ より}$$

$$(y_1+1)^2 = \frac{9}{4}$$

$$y_1+1 > 0 \text{ より } y_1+1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{よって } (x_1, y_1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \text{ であり}$$

$$\text{このとき } k = \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{9}{4} \text{ となり、これが } k \text{ の最大値となる}$$

以上のことから

$$(x+1)(y+1) \text{ の最大値 } \frac{9}{4} \quad \left((x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ のとき} \right)$$

$$\text{最小値 } \frac{3-\sqrt{6}}{3} \quad \left((x, y) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0 \right) \text{ のとき} \right)$$

となる